Analyse

Suites arithmétiques

Moyenne arithmétique de deux nombres

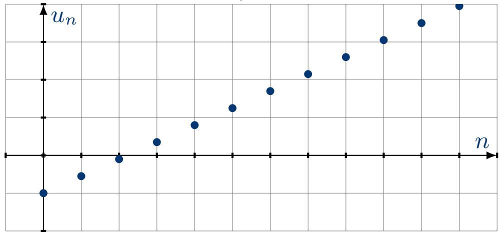
La moyenne arithmétique de deux nombres a et b est $\dfrac{a+b}{2}$.

Définition d'une suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique lorsque chaque terme est obtenu à partir du précédent en ajoutant un même nombre r qu'on appelle la raison :
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Croissance linéaire

Les points représentant une suite arithmétique sont situés sur une droite : on parle de croissance linéaire.



Lien avec la moyenne arithmétique

Trois nombres $a < b < c$ sont les termes d'une suite arithmétique si, et seulement si, $b = \dfrac{a+c}{2}$

Terme général d'une suite arithmétique

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 + n \times r$
- Si la suite commence à $n = 1$ alors $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

Notation « sigma »

La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ des n premiers termes d'une suite arithmétique s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Somme des termes d'une suite arithmétique

La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est
$S = n \times (\text{moyenne du 1er et du dernier terme})$

Suites géométriques

Moyenne géométrique de deux nombres

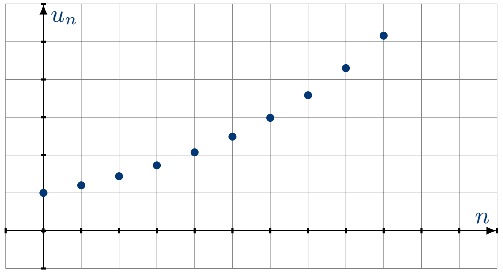
La moyenne géométrique de deux nombres a et b positifs est $\sqrt{a \times b}$.

Définition d'une suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique lorsque chaque terme est obtenu à partir du précédent en multipliant par un même nombre q qu'on appelle la raison :
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Croissance exponentielle

Les points représentant une suite géométrique suivent ce qu'on appelle une croissance exponentielle.



Lien avec la moyenne géométrique

Trois nombres positifs $a < b < c$ sont les termes d'une suite géométrique si, et seulement si, $b = \sqrt{a \times c}$.

Terme général d'une suite géométrique

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 \times q^n$
- Si la suite commence à $n = 1$ alors $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Somme des termes d'une suite géométrique

La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est
$S = \text{1er terme} \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

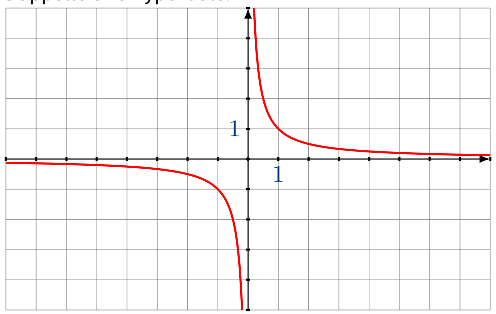
Fonction inverse

Définition de la fonction inverse

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Courbe représentative de la fonction inverse

La représentation graphique de la fonction inverse s'appelle une hyperbole.

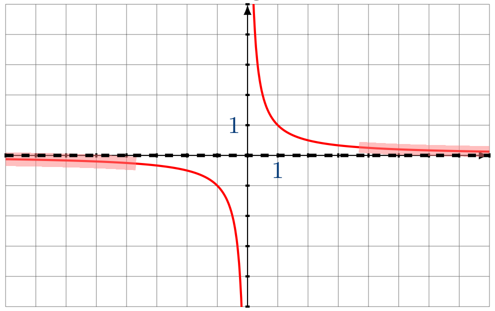


Comportement au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

- Lorsque la valeur de x devient de plus en plus grande, la valeur de $\dfrac{1}{x}$ devient de plus en plus proche de 0.
- Lorsque la valeur de x devient de plus en plus petite, la valeur de $\dfrac{1}{x}$ devient de plus en plus proche de 0.

Asymptote horizontale

La droite horizontale d'équation $y = 0$ se rapproche de plus en plus de la courbe de la fonction inverse : on dit que c'est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction inverse au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

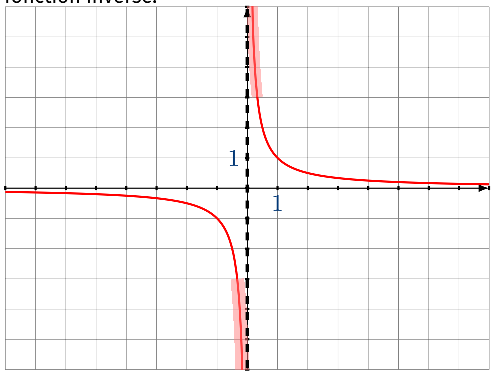


Comportement au voisinage de 0

- Lorsque la valeur de x devient de plus en plus proche de 0 tout en restant positive, la valeur de $\dfrac{1}{x}$ devient de plus en plus grande.
- Lorsque la valeur de x devient de plus en plus proche de 0 tout en restant négative, la valeur de $\dfrac{1}{x}$ devient de plus en plus petite.

Asymptote verticale

La droite verticale d'équation $x = 0$ se rapproche de plus en plus de la courbe de la fonction inverse : on dit que c'est une asymptote verticale à la courbe de la fonction inverse.



Fonctions exponentielles (1ère partie)

Définition des fonctions exponentielles

Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction exponentielle de base a est la fonction obtenue en prolongeant aux réels positifs la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison a.

Expression de la fonction exponentielle de base a

La fonction exponentielle de base a a pour expression $f(x) = a^x$.

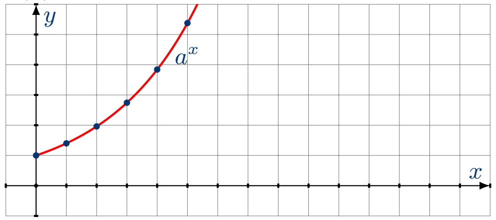
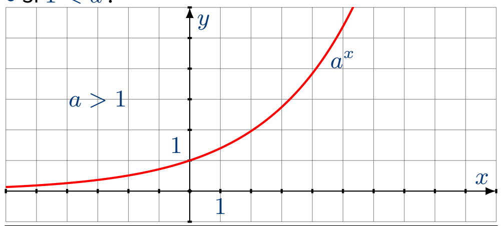


Image d'un nombre négatif

L'image d'un nombre x négatif par la fonction exponentielle de base a est obtenue grâce à la relation $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$.

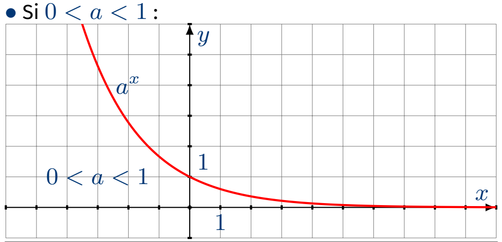
Sens de variations et représentation graphique

- Si $1 < a$:



x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = a^x$	0	$+\infty$

- Si $0 < a < 1$:



x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = a^x$	$+\infty$	0

- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle de base 1 est constante car $1^x = 1$.

Fonctions de la forme ka^x

Soit k un nombre réel non nul.

- Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto a^x$.
- Si $k < 0$, la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le sens de variation contraire de celui de la fonction $x \mapsto a^x$.

Fonctions exponentielles (2ème partie)

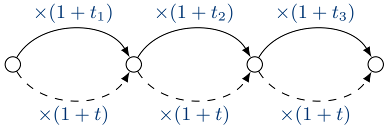
Propriétés algébriques des exponentielles

Soit a un réel strictement positif. Pour tous nombres réels x et y,

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^n = a^{n\times x}$ (n entier naturel)
- $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$

Taux d'évolution moyen

Si une grandeur subit n évolutions successives, le taux d'évolution moyen est le taux d'évolution t qu'il faudrait appliquer n fois à cette quantité pour aller de la valeur de départ à la valeur d'arrivée.



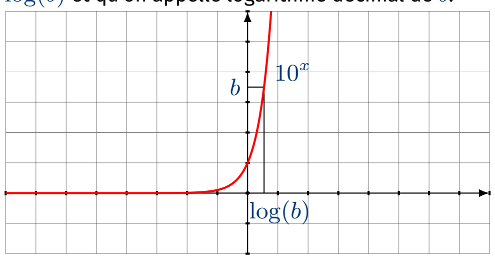
Calcul du taux d'évolution moyen

- Si T est le taux d'évolution global de n évolutions successives alors le taux d'évolution moyen t est $t = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1$
- Si C est le coefficient multiplicateur global alors $t = C^{\frac{1}{n}} - 1$.

Fonction logarithme décimal (1ère partie)

Logarithme décimal d'un nombre

Si b est un nombre strictement positif alors l'équation $10^x = b$ possède une unique solution qu'on note $\log(b)$ et qu'on appelle logarithme décimal de b.



Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'existe pas.

Propriétés du logarithme décimal

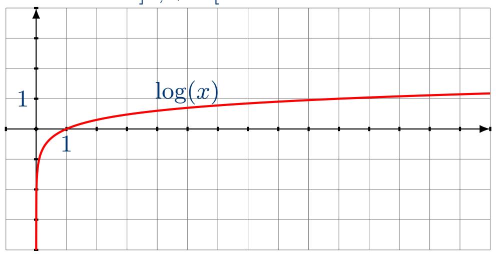
- $10^a = b \iff a = \log(b)$
- $\log(10^a) = a$
- $10^{\log(b)} = b$
- $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$

Définition de la fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \log(x)$.

Sens de variation

La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.



Signe de la fonction logarithme décimal

- $\log(x) > 0 \iff x > 1$
- $\log(x) < 0 \iff x < 1$
- $\log(x) = 0 \iff x = 1$

Fonction logarithme décimal (2ème partie)

Propriétés algébriques du logarithme

Si a et b sont deux nombres réels strictement positifs et si n est un entier naturel :

- $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(a^n) = n \times \log(a)$
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$

Équations et inéquations du type $a^x = b$

Pour résoudre une équation du type $a^x = b$, on applique la fonction logarithme décimal. On a alors $a^x = b \iff x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$

Inéquations du type $a^x \leqslant b$

Pour résoudre une inéquation du type $a^x \leqslant b$, on applique la fonction logarithme décimal. On a alors $a^x \leqslant b \iff x \leqslant \frac{\log(b)}{\log(a)}$

Autres propriétés du logarithme décimal

Si a un nombre réel et si $x > 0$:

- $\log(x) = a \iff x = 10^a$
- $\log(x) \leqslant a \iff x \leqslant 10^a$

Équations du type $x^a = b$

Pour résoudre une équation du type $x^a = b$, on applique la fonction logarithme décimal. On a alors $x^a = b \iff x = 10^{\frac{\log(b)}{a}}$

Inéquations du type $x^a \leqslant b$

Pour résoudre une équation du type $x^a \leqslant b$, on applique la fonction logarithme décimal. On a alors $x^a \leqslant b \iff x \leqslant 10^{\frac{\log(b)}{a}}$

Dérivation

Dérivée de la fonction inverse

La fonction dérivée de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Dérivée de $x \mapsto \frac{k}{x}$

Si k est un nombre réel alors la fonction dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \frac{k}{x}$ est $g'(x) = -\frac{k}{x^2}$.

Dérivée d'une somme

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. La dérivée de la fonction $f+g$ est $f'+g'$.

Fonction inverse et fonctions polynômiales

Si P est un polynôme, la dérivée de $f(x) = P(x) + \frac{k}{x}$ est $f'(x) = P'(x) - \frac{k}{x^2}$.

Statistique et probabilités

Probabilités conditionnelles

Probabilités conditionnelles

La probabilité qu'un événement B se réalise sachant qu'un événement A est réalisé s'appelle la probabilité conditionnelle de B sachant A. On la note $P_A(B)$ et on a

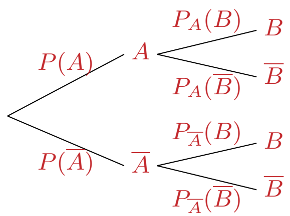
$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Probabilité d'une intersection

$P(A\cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Arbres de probabilités

Pour représenter une expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre sur lequel apparaîtront des probabilités conditionnelles :



Règles sur les arbres de probabilités

Dans un arbre de probabilités :

- La somme de toutes les probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité d'un chemin est la probabilité de l'intersection des événements qui composent ce chemin.

Formule des probabilités totales

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement dans un arbre pondéré :

$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$

Événements indépendants

On dit que B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$. Cela veut dire que l'événement A n'a pas d'influence sur l'événement B.

Propriétés des événements indépendants

B est indépendant de A si, et seulement si, A est indépendant de B si, et seulement si, $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$.

Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire. Une variable aléatoire X est une fonction qui, à chaque issue, lui associe un nombre.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une fonction qui, à chaque valeur x_i, associe la probabilité $P(X = x_i)$ que X prenne cette valeur. Elle est représentée sous forme d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Espérance d'une variable aléatoire

L'espérance d'une variable aléatoire X est le nombre $E(X)$ défini par :

$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$

Interprétation de l'espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X représente la valeur moyenne de X si on répétait l'expérience un grand nombre de fois.

Loi binomiale

Épreuves indépendantes

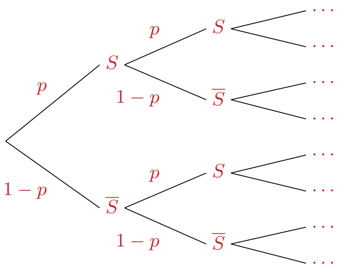
On dit que deux épreuves sont indépendantes si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat de l'autre.

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : l'une qu'on appelle « succès » (noté S) dont la probabilité est notée p et l'autre qu'on appelle « échec » (noté $\overline{S}$) dont la probabilité est $1-p$.

Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois de suite de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.



Coefficients binomiaux

Le nombre de chemins contenant k succès dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli à n répétitions se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent des coefficients binomiaux.

Relation de Pascal

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Triangle de Pascal

Pour déterminer les nombres $\binom{n}{k}$, on peut construire un tableau à double entrée, k horizontalement et n verticalement, tel que :

- les nombres de la première colonne valent 1
- les nombres de la diagonale valent 1
- chaque autre nombre est la somme du nombre situé juste au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Ce tableau s'appelle le triangle de Pascal.

Loi binomiale

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Loi de probabilité de la loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité d'avoir k succès est :

$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Espérance d'une loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors $E(X) = np$.

Statistiques à deux variables

Série statistique à deux variables

Dans une population, lorsqu'on étudie deux caractères X et Y simultanément, on obtient une série statistique à deux variables. On représente une telle série dans un tableau comme ci-dessous :

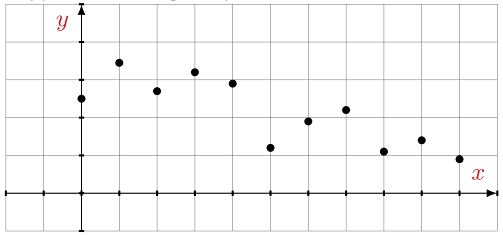
X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Série chronologique

Quand une des deux variables correspond au temps, on dit qu'il s'agit d'une série chronologique.

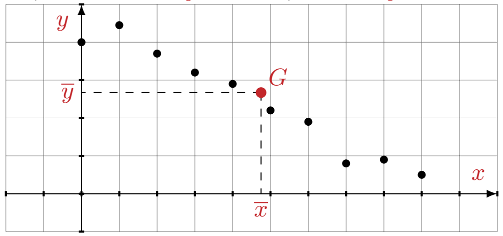
Nuage de points

Dans une série statistique à deux variables, les points $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ s'appellent le nuage de points associé à cette série.



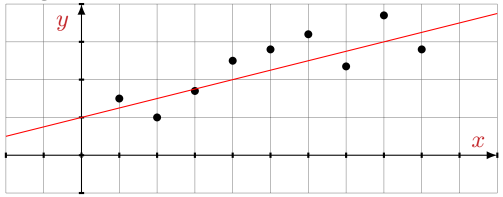
Point moyen

Le point moyen d'une série statistique à deux variables est le point G de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ où $\overline{x}$ est la moyenne des x_i et $\overline{y}$ est la moyenne des y_i.



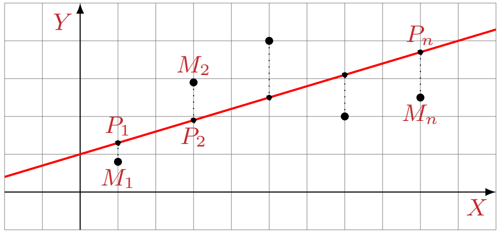
Ajustement affine d'une série à deux variables

Lorsque les points du nuage d'une série statistique à deux variables sont sensiblement alignés, on peut construire une droite passant au plus près de ces points et on dit qu'on réalise un ajustement affine de cette série. Cette droite s'appelle droite d'ajustement de ce nuage.



Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés consiste à déterminer la droite rendant la somme $M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \cdots + M_nP_n^2$ la plus petite possible.



En pratique, cette droite est déterminée à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.