Schéma de Bernoulli

Exercice 1
Un paquet de M&M's ™ en contient 8 rouges, 7 verts, 6 jaunes et 7 bleus. On s'intéresse à l'obtention d'un bleu (les meilleurs !). On considère les deux expériences aléatoires suivantes :

- Expérience 1 : On pioche au hasard un M&M's, on regarde sa couleur, on le mange puis on recommence une 2ème fois.
- Expérience 2 : On pioche au hasard un M&M's, on regarde sa couleur, on le remet proprement dans le paquet, puis on recommence une deuxième fois.

1. Laquelle de ces deux expériences est un schéma de Bernoulli ? Expliquer et donner les paramètres n et p de ce schéma.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.

Exercice 2
On effectue deux tirages successifs d'une carte dans un jeu de 32 cartes. À chaque fois, on remet la carte dans le jeu. Pour chaque tirage, on appelle succès l'événement « Obtenir un As ».

1. Justifier que cette expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli dont on donnera les paramètres.
2. Réaliser un arbre modélisant cette situation.

Exercice 3
Compléter le programme ci-dessous écrit en langage Python ci-dessous pour qu'il affiche la simulation du nombre de succès un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = 0,4$.

```
from random import random

S = 0
for k in range(......):
    resultat = random()
    if resultat <= ..... :
        S = ......
print(S)
```

Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Exercice 4
1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la valeur $n = 7$.
2. On considère les coefficients binomiaux suivants : $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{2}$, $\binom{4}{0}$, $\binom{3}{3}$ et $\binom{5}{0}$. Que valent chacun de ces coefficients ?
3. Plus généralement, si n est un entier naturel non nul, que valent $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$?

Exercice 5
Dans un arbre de probabilité modélisant un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 6$, combien de chemins comportent :

1. exactement 5 succès ?
2. exactement 3 succès ?

Exercice 6
Sans faire de calcul, donner la valeur des coefficients binomiaux suivants :

1. $\binom{21}{1}$ 2. $\binom{150}{0}$ 3. $\binom{42}{41}$ 4. $\binom{363}{363}$

Exercice 7
La ligne $n = 8$ du triangle de Pascal est la suivante :

1	8	28	56	70	56	28	8	1

En déduire la ligne $n = 9$ du triangle de Pascal.

Exercice 8
On donne les valeurs $\binom{11}{5} = 462$ et $\binom{11}{4} = 330$. En déduire la valeur de $\binom{12}{5}$.

Loi binomiale

Exercice 9
Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres quand c'est le cas.

1. Une urne contient deux boules vertes, une rouge et une bleue. On tire quatre boules avec remise. X est égale au nombre de boules rouges obtenues.
2. On lance quatre fois une pièce bien équilibrée. X est égale à 1 si la même face est apparue 4 fois et à 0 sinon.
3. On lance trois fois de suite un dé bien équilibrée. X est égale au plus grand nombre qui est apparu lors des trois lancers.

Exercice 10
Soit X un variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,2$. On admet que $\binom{7}{2} = 21$ et $\binom{7}{3} = 35$.
Déterminer les probabilités suivantes :

1. $P(X = 2)$
2. $P(X = 3)$

Exercice 11
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$. Déterminer la valeur exacte de $P(X = 2)$.

Exercice 12
Dans un lycée de 1000 élèves, on estime que 20% d'entre eux sont pour l'instauration d'un menu végétarien au restaurant scolaire. On choisit au hasard dix élèves et on note X le nombre d'élèves favorable à cette mesure.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'exactement un élève sur les dix choisis soit en faveur de l'instauration d'un menu végétarien. On donnera une valeur approchée du résultat à $10^{˘3}$ près.
3. Quel est le nombre moyen d'élèves en faveur de la nouvelle mesure sur dix élèves choisis ?

Exercice 13
En 2018, en France, il y a eu parmi les naissances, 51,2% de garçons et 48,8'% de filles. Un pédiatre a trois rendez-vous pour des enfants nés en 2018. On note X la variable aléatoire qui, pour trois rendez-vous, associe le nombre de filles ayant une consultation avec ce pédiatre. Le nombre de naissances en France est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces trois rendez-vous à un tirage avec remise de trois enfants nés en 2018. Les résultats seront à arrondir à $0,001$ près.

1. (a) X suit une loi binomiale. Déterminer ses paramètres n et p.
   (b) Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Interpréter les événements suivants :
   (a) $\{X = 0\}$
   (b) $\{X = 3\}$
   (c) $\{X \geqslant 1\}$
3. Calculer la probabilité que le pédiatre ait pour ces trois rendez-vous :
   (a) exactement deux filles
   (b) uniquement des garçons

Exercice 14
Le gingko biloba est un arbre fréquemment planté en milieu urbain car il est résistant aux pollutions et facile à entretenir. Cependant, certains des arbres de cette espèce produisent des fruits très malodorants. La municipalité d'une ville qui souhaite planter 30 gingkos dans une rue, prend commande auprès d'un pépiniériste. D'après celui-ci 10% des gingkos qu'il fournit produit des fruits malodorants.

1. Quelle hypothèse faut-il formuler pour que la situation suive une loi binomiale (dont on précisera les paramètres) ?
2. (a) Quelle est alors la probabilité, à 10^{-2} près, qu'aucun des 30 arbres plantés ne produise de fruits malodorants.
   (b) Si cette expérience est répétée un grand nombre de fois, en moyenne, combien d'arbres parmi les 30 gingkos plantés produiront des fruits malodorants ?

Exercices de type E3C

Exercice 15

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de surréservation afin d'abaisser les coûts. Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie.

Partie A

Une étude réalisée par la compagnie a établi que, sur cette ligne, pour une réservation en agence, 5% des clients ne se présentent pas à l'embarquement alors que, pour une réservation par Internet, 2% des clients ne se présentent pas à l'embarquement. Les réservations en agence représentent 30% de l'ensemble des réservations. Pour un embarquement donné et une réservation prise au hasard, on considère les évènements suivants :

- A : « la réservation a été faite en agence » ;
- I : « la réservation a été faite par Internet » ;
- E : « le passager se présente à l'embarquement ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Démontrer que la probabilité qu'un client ne se présente pas à l'embarquement est de $0,029$.
3. Calculer la probabilité que la réservation ait été faite en agence sachant que le client ne s'est pas présenté à l'embarquement.

Partie B

Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $\mu = 202$ et $p = 0,971$.

1. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
2. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
3. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

Exercice 16

Un jeu annonce que 10% des tickets sont gagnants. Un joueur en achète dix. On admet que le nombre de tickets est assez important pour que le choix d'un ticket puisse être assimilé à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tickets gagnants parmi dix ainsi choisis.

1. X suit une loi binomiale. Déterminer ses paramètres n et p
2. Combien de tickets gagnants peut-il espérer obtenir ?
3. (a) Recopier et compléter : $\binom{10}{0} = \ldots.$
   (b) En déduire $P(X = 0)$. Arrondir à $0,001$ près.
   (c) Interpréter ce résultat
4. (a) Interpréter l'événement $\{X \geqslant 1\}$.
   (b) Démontrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,9^{10}$. Donner une valeur approchée à $0,001$ près.
   (c) Ce joueur affirme qu'il est sûr de gagner au moins une fois. Que penser de cette affirmation ?
5. Le joueur souhaite savoir combien de tickets il devra acheter s'il veut avoir une probabilité d'obtenir au moins un ticket gagnant, supérieur ou égal à $0,99$. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tickets gagnants parmi n choisis. On admet que : $P(Y \geqslant 1) = 1 - 0,9^n$.
   (a) Recopier et compléter le programme écrit en langage Python ci-dessous afin d'obtenir la réponse à la question du joueur.

```
n = 0
while ..... :
    n = ......
print(n)
```

   (b) Quelle valeur sera affichée par cet algorithme ?