CHAPITRE 12

Loi binomiale

I Schémas de Bernoulli

1. Schéma de Bernoulli associé à une expérience aléatoire

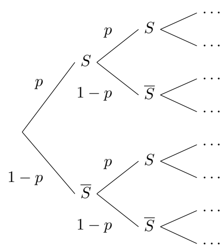
Définition I.1

On dit que deux épreuves sont **indépendantes** si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat de l'autre.

Exemple I.1 — Lancer une pièce de monnaie et lancer un dé à six faces sont deux épreuves indépendantes.

Définition I.2

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois de suite de manière **identique** et **indépendante** une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.



Exemple I.2 — On lance deux fois de suite un dé. On appelle succès l'événement « Obtenir un 4 ».

1. S'agit-il d'un schéma de Bernoulli ? Justifier.
2. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré. → À rédiger

2. Coefficients binomiaux

Définition I.3

Le nombre de chemins contenant k succès dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli à n répétitions se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent des **coefficients binomiaux**.

Exemple I.3 — 1. À l'aide d'un arbre, calculer $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

2. À l'aide d'un arbre, calculer $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{4}{4}$. → À rédiger

3. Triangle de Pascal

Proposition I.4 (Relation de Pascal)

Soit n un entier naturel et k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.4 — On donne $\binom{7}{1} = 7$ et $\binom{7}{2} = 21$. En déduire la valeur de :

1. $\binom{8}{2}$ 2. $\binom{8}{6}$ → À rédiger

Proposition I.5

Pour déterminer les nombres $\binom{n}{k}$, on peut construire un tableau à double entrée, k horizontalement et n verticalement, tel que :

- les nombres de la première colonne valent 1 car $\binom{n}{0} = 1$
- les nombres de la diagonale valent 1 car $\binom{n}{n} = 1$
- chaque autre nombre est la somme du nombre situé juste au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche car $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Ce tableau s'appelle le **triangle de Pascal**.

Exemple I.5 —

1. Construire le triangle de Pascal pour $n = 8$ et $k = 8$.
2. En déduire la valeur de $\binom{4}{3}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{3}$ et $\binom{8}{3}$. → À rédiger

II Loi binomiale

1. Variable suivant une loi binomiale

Définition II.1

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Exemple II.1 — Une urne contient une boule rouge et 3 boules vertes. Une expérience consiste à tirer deux fois de suite une boule avec remise. Le succès est « La boule tirée est rouge ». On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier la réponse. → À rédiger

Théorème II.2

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité d'avoir k succès est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemple II.2 — Un archer tire trois flèches de suite vers une cible. À chaque lancer, il a une probabilité de $0,9$ d'atteindre le cœur de la cible. On suppose que ses lancers sont indépendants. On définit le succès S : « L'archer touche le cœur de la cible ». On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès (c'est-à-dire au nombre de fois que l'archer touche le coeur de la cible).

1. Déterminer la probabilité de toucher exactement 2 fois le cœur de la cible sur les trois lancers.
2. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 3)$. → À rédiger

2. Espérance

Proposition II.3

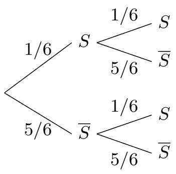
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors $E(X) = np$.

Exemple II.3 — Si on répond au hasard aux 10 questions d'un QCM, chaque question comportant quatre réponses dont une seule est exacte, à combien de questions répondra-t-on correctement en moyenne ? → À rédiger

Solutions

Exemple I.2

1. On répète deux fois de suite de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer un dé (succès : « obtenir un 4 »). Il s'agit donc bien d'un schéma de Bernoulli.
2. On a l'arbre suivant :



Exemple I.3

1. $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$
2. $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{4} = 1$

Proposition I.4
Dans un arbre, $\binom{n}{k}$ représente le nombre de chemins réalisant k succès parmi n répétitions. Or, ces chemins sont de deux types :

- soit ils comportent $k-1$ succès durant les $n-1$ premières répétitions et finissent par un succès lors de la dernière répétition, ce qui donne $\binom{n-1}{k-1}$ chemins;
- soit ils comportent k succès durant les $n-1$ premières répétitions et finissent par un échec lors de la dernière répétition, ce qui donne $\binom{n-1}{k}$ chemins;

On en déduit donc que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Exemple I.4

1. $\binom{8}{2} = \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 7 + 21 = 28$
2. $\binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2} = 28$

Exemple I.5

1. On a le tableau suivant :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

2. $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{7}{3} = 35$ et $\binom{8}{3} = 56$.

Exemple II.1
On répète deux fois de suite de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli consistant à choisir une boule dans l'urne et à regarder si elle est rouge (probabilité de succès $p = 1/4$).

Comme X compte le nombre de succès, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 1/4$.

Exemple II.2

1. Tout d'abord, on remarque que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,9$. Ainsi,
   $P(X = 2) = \binom{3}{2} 0,9^2 \times (1 - 0,9)^{3-2} = 3 \times 0,9^2 \times 0,1^1 = 0,243$
2. $P(X = 0) = \binom{3}{0} 0,9^0 \times (1 - 0,9)^{3-0} = 1 \times 0,9^0 \times 0,1^3 = 0,001$
   $P(X = 1) = \binom{3}{1} 0,9^1 \times (1 - 0,9)^{3-1} = 3 \times 0,9^1 \times 0,1^2 = 0,027$
   $P(X = 3) = \binom{3}{3} 0,9^3 \times (1 - 0,9)^{3-3} = 1 \times 0,9^3 \times 0,1^0 = 0,729$

Exemple II.3
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 1/4 = 0,25$.
L'espérance de X est $E(X) = np = 10 \times 0,25 = 2,5$. En moyenne, on répondra correctement à $2,5$ questions sur 10.

Loi binomiale

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer des coefficients binomiaux avec un arbre ou avec le triangle de Pascal
- Savoir reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier les paramètres
- Savoir interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilités
- Savoir calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = n\}$, $\{X = n - 1\}$ et de ceux qui s'en déduisent (par exemple $\{X \geqslant 1\}$)
- Savoir calculer $P(X = k)$ avec la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$

Loi binomiale

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer des coefficients binomiaux avec un arbre ou avec le triangle de Pascal
- Savoir reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier les paramètres
- Savoir interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilités
- Savoir calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = n\}$, $\{X = n - 1\}$ et de ceux qui s'en déduisent (par exemple $\{X \geqslant 1\}$)
- Savoir calculer $P(X = k)$ avec la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$

Loi binomiale

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer des coefficients binomiaux avec un arbre ou avec le triangle de Pascal
- Savoir reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier les paramètres
- Savoir interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilités
- Savoir calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = n\}$, $\{X = n - 1\}$ et de ceux qui s'en déduisent (par exemple $\{X \geqslant 1\}$)
- Savoir calculer $P(X = k)$ avec la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$