Propriétés algébriques du logarithme

Exercice 1
Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$.
1. $\log(20)$ 2. $\log(0,2)$ 3. $\log(2000)$ 4. $\log(16)$

Exercice 2
Exprimer en fonction de $\log(2)$ et $\log(5)$ les nombres suivants :
1. $\log(20)$ 2. $\log(40)$ 3. $\log(200)$ 4. $\log(250)$

Exercice 3
Exprimer en fonction de $\log(a)$ les expressions suivantes, a étant un nombre réel strictement positif.
1. $\log(a^3)$ 2. $\log(a^5) - \log(a^2)$ 3. $\log(a^{-3}) + \log(a^4)$
4. $\log(10a^5)$

Exercice 4
Exprimer en fonction de $\log(3)$ les nombres suivants :
1. $\log\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 2. $\log\left(\dfrac{3}{100}\right)$ 3. $\log\left(\dfrac{1}{9}\right)$ 4. $\log(0,003)$

Exercice 5
Exprimer en fonction de $\log(a)$ les expressions suivantes, a étant un nombre réel strictement positif.
1. $\log\left(\dfrac{10}{a}\right)$ 2. $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) + \log(a^5)$ 3. $\log\left(\dfrac{1}{a^2}\right)$
4. $\log\left(\dfrac{1000}{a^3}\right)$

Exercice 6
1. Soit x un entier naturel. Compléter : « $x = \log(\dots)$ »
2. Écrire les nombres suivants sous la forme $\log(a)$ où a un nombre strictement positif. On pourra s'aider de la question précédente.

$$A = 2 + \log(16)$$
$$B = 1 - \log(5)$$
$$C = \log(102) - 2$$
$$D = 2\log(0,3) - 3$$

Équations et inéquations du type $a^x = b$ ou $a^x \leqslant b$

Exercice 7
Résoudre dans $]0;+\infty[$ les équations suivantes :
1. $3^x = 241$
2. $5 \times 2^x = 140$
3. $3 \times 7^x - 4 = 1200$

Exercice 8
Résoudre dans $]0;+\infty[$ les inéquations suivantes :
1. $2^x \leqslant 300$
2. $10 \times 8^x \leqslant 65300$
3. $-3 \times 2^x - 4 \geqslant -3010$

Exercice 9
Déterminer le plus petit entier n tel que $0,76^n \leqslant 0,05$.

Exercice 10
Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = 375 \times 1,06^n + 250$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac (en cm), n jours après le 1er janvier 2019. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 mètres, c'est-à-dire 1 000 cm, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage. Calculer la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

Équations et inéquations du type $x^a = b$ ou $x^a \leqslant b$

Exercice 11
Résoudre dans $]0;+\infty[$ les équations suivantes :
1. $x^{0,2} = 2048$
2. $x^{5,25} = 15$
3. $2x^{0,7} = 25$
4. $x^{3,6} - 1 = 2,1$

Exercice 12
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k \times a^x$ avec k un réel non nul et a un réel strictement positif. On sait que $f(0) = 2$ et que $f(4) = 100$. Déterminer les valeurs de k et a.

Exercice 13
Résoudre dans $]0;+\infty[$ les inéquations suivantes :
1. $x^{7,6} \leqslant 1000$
2. $x^{0,1} \leqslant 2$

Exercices de type E3C

Exercice 14
On injecte à une personne une dose de médicament. La quantité de médicament (exprimée en cm^3) présente dans le sang de la patiente au bout du temps t (exprimé en heures) est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;8]$ par : $f(t) = 3 \times 0,86^t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
2. Pour tout réel t de $[0;6]$, calculer $\dfrac{f(t+2)}{f(t)}$. Interpréter ce résultat.
3. (a) Résoudre l'inéquation $f(t) < 1,5$ dans l'intervalle $[0;8]$.
   (b) Déterminer le temps nécessaire pour que la quantité de médicament dans le sang diminue de moitié. On donnera le résultat arrondi à $0,1$ près, puis on le convertira en heures et minutes.
4. On injecte maintenant 5cm^3 de ce même médicament à une autre personne. Sur l'intervalle $[0;8]$, la fonction g donnant la quantité de médicament (exprimée en cm^3) présente dans le sang de cette personne après un temps t (exprimé en heures) est du type : $g(t) = 5 \times a^t$. Au bout d'une heure et demie, la quantité de médicament présente dans le sang du malade s'élève à 4,2cm^3. Calculer la valeur du nombre réel a. En donner une valeur approchée à $0,01$ près.

Exercice 15
1000 voitures sont mises en circulation en même temps. On estime qu'en raison des accidents et des pannes, 6% de ces voitures sont retirées de la circulation chaque année (régulièrement au fil des mois).

1. Combien de voitures sont toujours en circulation au bout d'un an ?
2. Justifier que pour x, exprimé en nombre entier d'années, le nombre de voitures restant en circulation est donné par $f(x) = 1000 \times 0,94^x$. En déduire le nombre de voitures restantes au bout de 20 ans. Arrondir à l'unité.
3. Convertir 42 mois en années, puis déterminer le nombre de voitures en circulation après 42 mois en admettant que le modèle précédent reste valable pour des nombres non entiers d'années. Arrondir à l'unité.
4. On veut savoir au bout de combien de temps il y aura moins de 500 voitures en circulation. Montrer que cette question revient à résoudre l'inéquation $0,94^x \leqslant 0,5$.
5. (a) Montrer que l'inéquation précédente a pour solution $x \geqslant \dfrac{\log(0,5)}{\log(0,94)}$.
   (b) Déterminer finalement la durée minimale, en mois, pour qu'il reste moins de 500 véhicules.