

Fonction logarithme décimal (2ème partie)

I Propriétés algébriques du logarithme

Proposition I.1

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier naturel.

- $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(a^n) = n \times \log(a)$

Exemple I.1 — Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$:

1. $\log(2 \times 10^3)$
2. $\log(2^5)$
3. $\log(8 \times 10^4)$
4. $\log(1600)$

→ À rédiger

Proposition I.2

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier naturel.

- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$

Exemple I.2 — Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$ et de $\log(3)$:

1. $\log\left(\frac{3}{2}\right)$
2. $\log\left(\frac{9}{4}\right)$
3. $\log\left(\frac{1}{3}\right)$
4. $\log\left(\frac{1}{6}\right)$

→ À rédiger

II Résolution d'équations et d'inéquations

1. Équations et inéquations du type $a^x = b$ ou $a^x \leq b$

Exemple II.1 — Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $5^x = 4$
2. $13 - 5 \times 3^x = 1$
3. $2^x \leq 120$
4. $15 + 0,5^x \leq 28$

→ À rédiger

Exemple II.2 — Une école de danse a ouvert ses portes en 2019. Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'inscrits l'année $2019+n$. On admet que $u_n = 200 \times 1,15^n + 600$. À partir de quelle année y aura-t-il plus de 2000 adhérents ?

→ À rédiger

2. Équations et inéquations du type $x^a = b$ ou $x^a \leq b$

Proposition II.1

Soit a un nombre réel et $x > 0$.

- $\log(x) = a \iff x = 10^a$
- $\log(x) \leq a \iff x \leq 10^a$

Exemple II.3 — Résoudre dans $]0; +\infty[$ les équations et inéquations suivantes :

1. $x^3 = 8$
2. $5 \times x^4 = 1280$
3. $x^4 \leq 110$
4. $5x^{1,4} \leq 625$

→ À rédiger

Exemple II.4 — Un particulier a placé son argent sur un compte rémunéré à un certain taux d'intérêt. Après 5 années, il constate que son capital a augmenté de 21,7%.

1. On note C le coefficient multiplicateur correspondant à une seule année. Écrire une équation dont l'inconnue est C .
2. Résoudre cette équation.
3. En déduire le taux d'intérêt de ce placement.

→ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $\log(2 \times 10^3) = \log(2) + \log(10^3) = \log(2) + 3$
2. $\log(2^5) = 5 \times \log(2)$
3. $\log(8 \times 10^4) = \log(8) + \log(10^4) = \log(2^3) + 4 = 3 \log(2) + 4$
4. $\log(1600) = \log(16 \times 10^2) = \log(2^4) + 2 = 4 \log(2) + 2$

Exemple I.2

1. $\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(3) - \log(2)$
2. $\log\left(\frac{9}{4}\right) = \log(9) - \log(4) = \log(3^2) - \log(2^2) = 2 \log(3) - 2 \log(2)$
3. $\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3)$
4. $\log\left(\frac{1}{6}\right) = -\log(6) = -\log(2 \times 3) = -(\log(2) + \log(3)) = -\log(2) - \log(3)$

Exemple II.1

1. $5^x = 4 \iff \log(5^x) = \log(4) \iff x \log(5) = \log(4) \iff x = \frac{\log(4)}{\log(5)}$
2. $13 - 5 \times 3^x = 1 \iff -5 \times 3^x = -12 \iff 3^x = 2,4 \iff \log(3^x) = \log(2,4) \iff x \log(3) = \log(2,4) \iff x = \frac{\log(2,4)}{\log(3)}$
3. $2^x \leq 120 \iff \log(2^x) \leq \log(120) \iff x \log(2) \leq 120 \iff x \leq \frac{\log(120)}{\log(2)}$ (on ne change pas le sens car $\log(2)$ est positif)
4. $15 + 0,5^x \leq 28 \iff 0,5^x \leq 13 \iff x \log(0,5) \leq \log(13) \iff x \geq \frac{\log(13)}{\log(0,5)}$ (on a changé le sens car $\log(0,5)$ est négatif)

Exemple II.2

$u_n \geq 2000 \iff 200 \times 1,15^n + 600 \geq 2000 \iff 200 \times 1,15^n \geq 1400 \iff 1,15^n \geq 7 \iff n \log(1,15) \geq \log(7) \iff n \geq \frac{\log(7)}{\log(1,15)}$.

Or, $\frac{\log(7)}{\log(1,15)} \approx 13,92$ donc cette école aura plus de 2000 adhérents dans 14 ans.

Exemple II.3

1. $x^3 = 8 \iff 3 \log(x) = \log(8) \iff \log(x) = \frac{\log(8)}{3} \iff x = 10^{\frac{\log(8)}{3}}$
2. $5 \times x^4 = 1280 \iff 4 \log(x) = \log(256) \iff \log(x) = \frac{\log(256)}{4} \iff x = 10^{\frac{\log(256)}{4}}$
3. $x^4 \leq 110 \iff 4 \log(x) \leq \log(110) \iff \log(x) \leq \frac{\log(110)}{4} \iff x \leq 10^{\frac{\log(110)}{4}}$
4. $5x^{1,4} \leq 625 \iff x^{1,4} \leq 125 \iff 1,4 \log(x) \leq \log(125) \iff \log(x) \leq \frac{\log(125)}{1,4} \iff x \leq 10^{\frac{\log(125)}{1,4}}$

Exemple II.4

1. $C^5 = 1,217$
2. $C^5 = 1,217 \iff 5 \log(C) = \log(1,217) \iff \log(C) = \frac{\log(1,217)}{5} \iff C = 10^{\frac{\log(1,217)}{5}} \iff C \approx 1,04$
3. Le taux d'intérêt de ce placement est donc de 4% par an.

Fonction logarithme décimal (2ème partie) ---

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour transformer une expression
- Utiliser le logarithme pour résoudre une équation ou inéquation du type $a^x = b$ ou $a^x \leq b$
- Utiliser le logarithme pour résoudre une équation ou inéquation du type $x^a = b$ ou $x^a \leq b$

Fonction logarithme décimal (2ème partie) ---

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour transformer une expression
- Utiliser le logarithme pour résoudre une équation ou inéquation du type $a^x = b$ ou $a^x \leq b$
- Utiliser le logarithme pour résoudre une équation ou inéquation du type $x^a = b$ ou $x^a \leq b$

Fonction logarithme décimal (2ème partie) ---

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour transformer une expression
- Utiliser le logarithme pour résoudre une équation ou inéquation du type $a^x = b$ ou $a^x \leq b$
- Utiliser le logarithme pour résoudre une équation ou inéquation du type $x^a = b$ ou $x^a \leq b$