Propriétés algébriques du logarithme

Partie A

1. (a) On sait que $\log(10^x) = x$ et que $\log(10^y) = y$. À quoi est égal $\log(10^x \times 10^y)$?
   (b) Recopier et compléter : $\log(10^x \times 10^y) = \ldots + \ldots$.

   De manière générale, on admettra que pour tous réels a et b strictement positifs, $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$.
2. En utilisant le résultat admis précédemment, à quoi est égal $\log(a^2)$, où a est un réel strictement positif ?
   De manière générale, on admettra que pour tous réel a strictement positif et tout entier naturel n, $\log(a^n) = n\log(a)$.
3. Soit b un nombre réel strictement positif. On sait que $b \times \dfrac{1}{b} = 1$. En utilisant cette égalité, montrer que $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$.

Partie B

Le niveau sonore N d'un son, exprimé en décibels (dB), est donné par la relation $N = 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$ où I est l'intensité sonore de la source de bruit (exprimée en Watts par mètre carré).

1. Montrer que si on multiplie par 2 l'intensité sonore I, alors cela revient à augmenter de 3dB environ le niveau sonore N.
2. Le niveau sonore d'une moto en course est de 90dB. Sachant que les intensités sonores de deux motos s'ajoutent, quel est le niveau sonore de deux motos côte à cote ?

Nombre de chiffres de très grand nombres

1. Sur votre calculatrice, taper 99^{99} et 2^{2021}. Que constatez-vous ?
2. Certaines calculatrices n'ont pas les capacités suffisantes pour effectuer ces calculs. On peut utiliser le logarithme pour déterminer le nombre de chiffres de ces nombres.
   (a) Soit un nombre entier positif N comportant deux chiffres. N est donc compris entre 10 et 99. On a donc l'encadrement suivant : $10^1 \leqslant N \leqslant 10^2 - 1$ c'est-à-dire $10^1 \leqslant N < 10^2$.
   Montrer que l'on a $1 \leqslant \log(N) < 2$.
   (b) Soit N un nombre entier positif à trois chiffres. Montrer que $2 \leqslant \log(N) < 3$.
   (c) De manière générale, si N est un entier positif à p chiffres, montrer que $p - 1 \leqslant N < p$.
3. Le nombre p de chiffres de l'entier positif N est donc le premier entier supérieur ou égal à son logarithme décimal. Sachant cela, déterminer le nombre de chiffres des nombres 99^{99} et 2^{2021}.