Dérivée de la fonction inverse

Exercice 1
Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.

1. $f(x) = \dfrac{6}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{-8}{x}$
3. $f(x) = -\dfrac{20}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1,3}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{3}{2x}$

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 \times \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que, pour tout réel x de I, $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.
3. Justifier que f est décroissante sur I.

Exercice 3
Étudier le sens de variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-4}{x}$.

Polynômes et fonction inverse

Exercice 4
Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.

1. $f(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$
2. $f(x) = -3x^2 - \dfrac{2}{x}$
3. $f(x) = 7x^2 - 2x + 6 + \dfrac{4}{x}$
4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + x - 3 - \dfrac{1}{x}$

Exercice 5
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a, a étant un réel donné.

1. $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$ et $a = 1$
2. $f(x) = 5x + \dfrac{4}{x}$ et $a = 2$
3. $f(x) = 4x^2 - 2x - \dfrac{15}{x}$ et $a = 3$.

Exercice 6
Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 9x + 1 + \dfrac{36}{x}$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{(3x-6)(3x+6)}{x^2}$.

Étude de fonctions

Exercice 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 4x + 1 + \dfrac{9}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 8
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x + 10 - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel x non nul, $g'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 9
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + x + 1$.

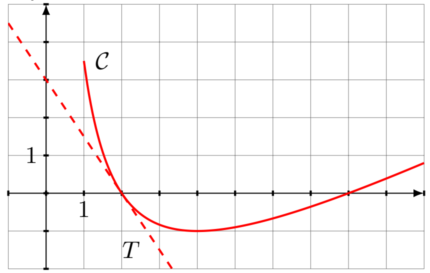
1. Déterminer le tableau de signes de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = x^2 - x + 1 + \dfrac{1}{x}$.
   (a) Déterminer $h'(x)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x non nul,
   $h'(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$
   (c) Dresser le tableau de variations de h.

Exercice 10
Lorsqu'un véhicule roule entre 10km/h et 130km/h, sa consommation d'essence c (en litres) s'exprime en fonction de sa vitesse v (en km/h) par l'expression $c(v) = 0,06v + \dfrac{150}{v}$.

1. Montrer que pour tout $v \in [10; 130]$,
   $c'(v) = \dfrac{0,06(v-50)(v+50)}{v^2}$.
2. Étudier le signe de $c'(v)$ sur l'intervalle $[10; 130]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction c.
3. (a) En déduire la vitesse à laquelle doit rouler ce véhicule pour que sa consommation d'essence soit minimale.
   (b) Déterminer la consommation minimale en litres.

Exercices de type E3C

Exercice 11
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1; 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous. La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(2; 0)$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

1. À l'aide des informations précédentes, recopier et compléter le tableau ci-dessous.

x	1	$\cdots$	10
$f'(x)$			
f	3,5 ↘	$\cdots$	↗ 0,8

2. Donner sans justification le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Justifier que le coefficient directeur de la tangente T est $-1,5$. En déduire la valeur de $f'(2)$.

Partie B
L'expression de f est donnée pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ par $f(x) = 0,5x - 5 + \dfrac{8}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[1; 10]$.
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 8.

Exercice 12
Une entreprise produit et vend du safran, une épice de grande qualité. On note x le nombre de kilogrammes que produit et vend l'entreprise en un an, x étant compris entre 1 et 9. Le coût moyen de production, exprimé en milliers d'euros, d'un kilogramme de safran lorsqu'on en fabrique x kg, est modélisé par la fonction C_M définie sur l'intervalle $[1; 9]$ par : $C_M(x) = 2x^2 - 23x + 90 + \dfrac{36}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in [1; 9]$,
   $C'_M(x) = \dfrac{(x-6)(4x^2+x+6)}{x^2}$.

2. Justifier que sur $[1;9]$, $C'_M(x)$ a le même signe que $x-6$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction C_M sur $[1;9]$.
4. Chaque kilogramme de safran est vendu au prix de 50 milliers d'euros. L'entreprise réalise un profit lorsque le prix unitaire est supérieur au coût moyen. Recopier, puis compléter le programme ci-dessous afin que la fonction safran retourne, à 100 grammes près, la quantité minimale de safran à produire et vendre pour réaliser un bénéfice.

```
def safran(x):
    x = 1
    p = 50
    c = 2*x**2 - 23*x + 90 + 36/x
    while ...... :
        x = x + 0.1
        c = 2*x**2 - 23*x + 90 + 36/x
    return .......
```