

I

Dérivée de la fonction inverse

Proposition I.1

La fonction dérivée de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Démonstration.

→ À rédiger

Proposition I.2

Soit k un nombre réel. La fonction dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \frac{k}{x}$ est

$$g'(x) = -\frac{k}{x^2}$$

Exemple I.1 — Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de f :

$$1. f(x) = \frac{3}{x}$$

$$2. f(x) = \frac{-2}{x}$$

$$3. f(x) = \frac{4}{7x}$$

→ À rédiger

Exemple I.2 — Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{5}{x}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de g .

2. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

→ À rédiger

II

Combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynômes

Proposition II.1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . La dérivée de la fonction $f + g$ est $f' + g'$.

Exemple II.1 — Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction h et la mettre au même dénominateur :

$$1. h(x) = 2x + 1 + \frac{8}{x}$$

$$2. h(x) = 4x^2 - 3x - 3 - \frac{7}{x}$$

$$3. h(x) = -4x^3 + 6x^2 - 2x + 8 + \frac{3}{x}$$

→ À rédiger

Exemple II.2 — On modélise le chiffre d'affaires mensuel d'une entreprise, en millions d'euros, par une fonction f telle que $f(1)$ désigne le chiffre d'affaire du mois de janvier, $f(2)$ celui de février, etc. On admet que f est définie sur $[1; 12]$ par $f(x) = \frac{15x + 20}{x}$.

1. (a) Montrer que pour tout réel $x \in [1, 12]$, $f(x) = 15 + \frac{20}{x}$.

(b) Calculer $f'(x)$ et donner son signe sur l'intervalle $[1; 12]$.

2. Montrer que le chiffre d'affaire mensuel restera supérieur à 15 millions d'euros.

→ À rédiger

Solutions

Proposition I.1

Soit a un réel non nul. Le taux d'accroissement entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}$$

donc

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{a(a+h)}.$$

Comme le nombre $\frac{1}{a(a+h)}$ possède une limite qui est $\frac{-1}{a^2}$, cela veut dire que la fonction inverse est dérivable en a et que $f'(a) = \frac{-1}{a^2}$.

Exemple I.1

$$1. f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

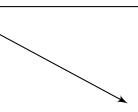
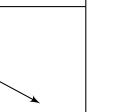
$$2. f'(x) = -\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

$$3. \text{ Comme } f(x) = \frac{4}{x^7} \text{ alors } f'(x) = -\frac{4}{x^8} = -\frac{4}{7x^2}$$

Exemple I.2

$$1. g'(x) = \frac{-5}{x^2}$$

2. Comme $-5 < 0$ et que $x^2 > 0$ sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ alors $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. On en déduit que g est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g			

Exemple II.1

$$1. h(x) = f(x) + g(x) \text{ avec } f(x) = 2x + 1 \text{ et } g(x) = \frac{8}{x}$$

Or, $f'(x) = 2$ et $g'(x) = -\frac{8}{x^2}$ donc

$$h'(x) = 2 + \left(-\frac{8}{x^2} \right) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$2. h(x) = f(x) + g(x) \text{ avec } f(x) = 4x^2 - 3x - 3 \text{ et } g(x) = \frac{-7}{x}$$

Or, $f'(x) = 8x - 3$ et $g'(x) = -\frac{7}{x^2} = \frac{7}{x^2}$ donc

$$h'(x) = 8x - 3 + \frac{7}{x^2} = \frac{x^2(8x-3)}{x^2} + \frac{7}{x^2} = \frac{8x^3 - 3x^2 + 7}{x^2}$$

$$3. h(x) = f(x) + g(x) \text{ avec } f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 2x + 8 \text{ et } g(x) = \frac{3}{x}$$

Or, $f'(x) = -12x^2 + 12x - 2$ et $g'(x) = -\frac{3}{x^2}$ donc

$$h'(x) = -12x^2 + 12x - 2 + \left(-\frac{3}{x^2} \right) = -12x^2 + 12x - 2 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2(-12x^2 + 12x - 2)}{x^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{-12x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 3}{x^2}$$

Exemple I.2

$$1. (a) f(x) = \frac{15x + 20}{x} = \frac{15x}{x} + \frac{20}{x} = 15 + \frac{20}{x}$$

$$(b) f'(x) = 0 + \left(-\frac{20}{x^2} \right) = \frac{-20}{x^2}$$

2. Comme $f'(x) < 0$, la fonction f est décroissante sur $[1; 12]$. Sa valeur minimale est donc $f(12) = 15 + \frac{20}{12} \approx 16,6$. On voit donc que le chiffre d'affaires restera plus grand que 15 millions d'euros.

Dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la dérivée de la fonction inverse
- Savoir dériver les fonctions du type $x \mapsto \frac{k}{x}$
- Savoir étudier une fonction comportant à la fois un polynôme et une fonction inverse

Dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la dérivée de la fonction inverse
- Savoir dériver les fonctions du type $x \mapsto \frac{k}{x}$
- Savoir étudier une fonction comportant à la fois un polynôme et une fonction inverse

Dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la dérivée de la fonction inverse
- Savoir dériver les fonctions du type $x \mapsto \frac{k}{x}$
- Savoir étudier une fonction comportant à la fois un polynôme et une fonction inverse