CHAPITRE 10

Dérivation

I Dérivée de la fonction inverse

Proposition I.1

La fonction dérivée de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Démonstration. → À rédiger

Proposition I.2

Soit k un nombre réel. La fonction dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{k}{x}$ est

$$g'(x) = -\frac{k}{x^2}$$

Exemple I.1 — Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de f :

1. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{-2}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{4}{7x}$

→ À rédiger

Exemple I.2 — Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{5}{x}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de g.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

→ À rédiger

II Combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynômiales

Proposition II.1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. La dérivée de la fonction $f + g$ est $f' + g'$.

Exemple II.1 — Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction h et la mettre au même dénominateur :

1. $h(x) = 2x + 1 + \dfrac{8}{x}$
2. $h(x) = 4x^2 - 3x - 3 - \dfrac{7}{x}$
3. $h(x) = -4x^3 + 6x^2 - 2x + 8 + \dfrac{3}{x}$

→ À rédiger

Exemple II.2 — On modélise le chiffre d'affaires mensuel d'une entreprise, en millions d'euros, par une fonction f telle que $f(1)$ désigne le chiffre d'affaire du mois de janvier, $f(2)$ celui de février, etc. On admet que f est définie sur $[1; 12]$ par $f(x) = \dfrac{15x + 20}{x}$.

1. (a) Montrer que pour tout réel $x \in [1, 12]$, $f(x) = 15 + \dfrac{20}{x}$.
   (b) Calculer $f'(x)$ et donner son signe sur l'intervalle $[1; 12]$.
2. Montrer que le chiffre d'affaire mensuel restera supérieur à 15 millions d'euros.

→ À rédiger

Solutions

Proposition I.1
Soit a un réel non nul. Le taux d'accroissement entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}$$

donc

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{a(a+h)}.$$

Comme le nombre $\frac{1}{a(a+h)}$ possède une limite qui est $\frac{-1}{a^2}$, cela veut dire que la fonction inverse est dérivable en a et que $f'(a) = \frac{-1}{a^2}$.

Exemple I.1
1. $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$
2. $f'(x) = -\frac{-2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$
3. Comme $f(x) = \frac{\frac{4}{7}}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{\frac{4}{7}}{x^2} = -\frac{4}{7x^2}$

Exemple I.2
1. $g'(x) = \frac{-5}{x^2}$
2. Comme $-5 < 0$ et que $x^2 > 0$ sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ alors $g'(x) < 0$ sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. On en déduit que g est décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Exemple II.1
1. $h(x) = f(x) + g(x)$ avec $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = \frac{8}{x}$

   Or, $f'(x) = 2$ et $g'(x) = -\frac{8}{x^2}$ donc

   $h'(x) = 2+\left(-\frac{8}{x^2}\right) = 2-\frac{8}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2}-\frac{8}{x^2} = \frac{2x^2-8}{x^2}$
2. $h(x) = f(x) + g(x)$ avec $f(x) = 4x^2 - 3x - 3$ et $g(x) = \frac{-7}{x}$

   Or, $f'(x) = 8x-3$ et $g'(x) = -\frac{-7}{x^2} = \frac{7}{x^2}$ donc

   $h'(x) = 8x - 3 + \frac{7}{x^2} = \frac{x^2(8x-3)}{x^2} + \frac{7}{x^2} = \frac{8x^3-3x^2+7}{x^2}$
3. $h(x) = f(x) + g(x)$ avec $f(x) = -4x^3+6x^2-2x+8$ et $g(x) = \frac{3}{x}$

   Or, $f'(x) = -12x^2+12x-2$ et $g'(x) = -\frac{3}{x^2}$ donc

   $h'(x) = -12x^2 + 12x - 2 + \left(-\frac{3}{x^2}\right) = -12x^2 + 12x - 2 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2(-12x^2+12x-2)}{x^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{-12x^4+12x^3-2x^2-3}{x^2}$

Exemple I.2
1. (a) $f(x) = \frac{15x+20}{x} = \frac{15x}{x} + \frac{20}{x} = 15 + \frac{20}{x}$

   (b) $f'(x) = 0 + \left(-\frac{20}{x^2}\right) = \frac{-20}{x^2}$
2. Comme $f'(x) < 0$, la fonction f est décroissante sur $[1;12]$. Sa valeur minimale est donc $f(12) = 15 + \frac{20}{12} \approx 16,6$. On voit donc que le chiffre d'affaires restera plus grand que 15 millions d'euros.

Dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la dérivée de la fonction inverse
- Savoir dériver les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{k}{x}$
- Savoir étudier une fonction comportant à la fois un polynôme et une fonction inverse

Dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la dérivée de la fonction inverse
- Savoir dériver les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{k}{x}$
- Savoir étudier une fonction comportant à la fois un polynôme et une fonction inverse

Dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la dérivée de la fonction inverse
- Savoir dériver les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{k}{x}$
- Savoir étudier une fonction comportant à la fois un polynôme et une fonction inverse