Dérivation— Activité

Dérivée de la fonction inverse

1. Recopier et compléter :
   « Si une fonction f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ldots$ ».
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
   (a) Ouvrir un feuille de tableur et suivre les instructions suivantes :

Etape 1. Reproduire la première ligne comme ci-dessous

	A	B	C
1	h	$f(2+h)-f(2)$	Taux d'accroissement

Etape 2. Dans la cellule A2, saisir le nombre $0,5$ et dans la cellule A3 saisir la formule « = A2/2 ». Etirer la cellule A3 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Etape 3. Dans la cellule B2, saisir la formule permettant de calculer $f(2+h)-f(2)$. Etirer la cellule B2 jusqu'à la ligne 20.

Etape 4. Saisir dans la cellule C2 la formule qui convient pour que soit calculé le taux d'accroissement souhaité. Étirer la cellule C2 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Lorsque h se rapproche de 0 (en étant positif), quelle semble être la limite du taux d'accroissement ?

   (b) Remplacer le nombre $0,5$ de la cellule A2 par $-0,5$. Lorsque h se rapproche de 0 (en étant négatif), quelle semble être la limite du taux d'accroissement ?
   (c) À l'aide des deux questions précédentes, conjecturer la valeur de $f'(2)$.
   (d) Justifier que pour tout nombre réel h non nul, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{-1}{2(2+h)}$ puis valider la conjecture de la question précédente.
3. On souhaite généraliser ce résultat. Soit a un nombre réel non nul. Justifier que pour tout nombre réel h non nul, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{-1}{a(a+h)}$ puis en déduire une expression de $f'(a)$ en fonction de a.