

Statistiques à deux variables

I Séries statistiques à deux variables

1. Définition d'une série à deux variables

Définition I.1

Dans une population, lorsqu'on étudie deux caractères X et Y simultanément, on obtient une **série statistique à deux variables**. On représente une telle série dans un tableau comme ci-dessous :

X	x_1	x_2	\cdots	x_n
Y	y_1	y_2	\cdots	y_n

Remarque — Quand une des deux variables correspond au temps, on dit que c'est une série chronologique.

Exemple I.1 — On a relevé la température à différentes altitudes sur une route de montagne :

Altitude (km)	0,4	0,8	1,2	1,5	1,9	2
Température ($^{\circ}$ C)	8,6	6,5	2,8	1,2	-1	-1,9

1. Quels sont les caractères étudiés ?

2. Peut-on dire que la température est proportionnelle à l'altitude ?

→ À rédiger

2. Nuage de points

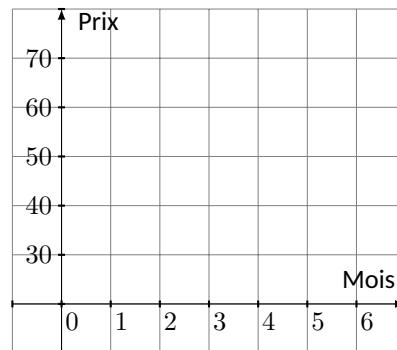
Définition I.2

Dans une série statistique à deux variables, les points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$ s'appellent le **nuage de points** associé à cette série.

Exemple I.2 — Un comparateur de prix sur Internet a étudié l'évolution du prix d'un jeu vidéo dans une grande enseigne suivant le temps écoulé, en mois :

Temps (mois)	0	1	2	3	4	5	6
Prix (€)	60	64,5	57	52	49	42	39

Représenter cette série statistique par un nuage de points dans le repère ci-dessous :



→ À rédiger

3. Point moyen

Définition I.3

Le **point moyen** d'une série statistique à deux variables est le point G de coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) où \bar{x} est la moyenne des x_i et \bar{y} est la moyenne des y_i .

Exemple I.3 — Déterminer le point moyen G de la série statistique de l'exemple précédent, le placer sur le graphique puis interpréter.

→ À rédiger

Ajustement affine

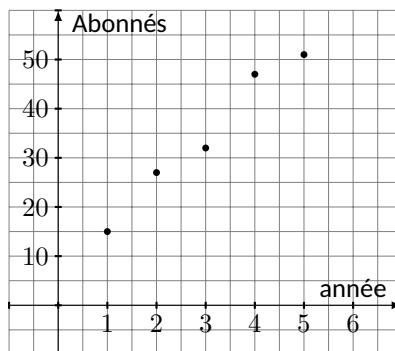
1. Ajustement affine d'une série à deux variables

Définition II.1

Lorsque les points du nuage d'une série statistique à deux variables sont sensiblement alignés, on peut construire une droite passant au plus près de ces points et on dit qu'on réalise un **ajustement affine** de cette série. Cette droite s'appelle alors **droite d'ajustement** de ce nuage.

Exemple II.1 — Le tableau suivant donne le nombre d'abonnés, en milliers, d'un opérateur téléphonique sur cinq années :

Année	1	2	3	4	5
Abonnés (en milliers)	15	27	32	47	51



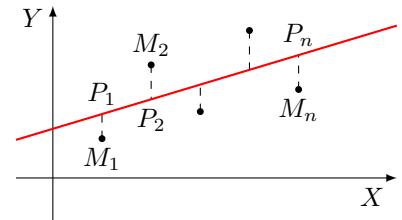
1. Tracer sur le graphique une droite passant « au plus près » de chacun des points du nuage.
2. Déterminer une équation de cette droite d'ajustement.
3. À l'aide de l'équation, estimer le nombre d'abonnés la 6ème année.

→ À rédiger

2. Méthode des moindres carrés

Définition II.2

La **méthode des moindres carrés** consiste à déterminer la droite rendant la somme $M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \dots + M_nP_n^2$ la plus petite possible.



Remarque — En pratique, cette droite est déterminée à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

Exemple II.2 — On donne ci-dessous l'évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise première sur 7 ans :

Temps (années)	1	2	3	4	5	6	7
CA (millions d'euros)	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.
2. À quelle valeur peut-on estimer le chiffre d'affaires la 8ème année ?

→ À rédiger

Équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés

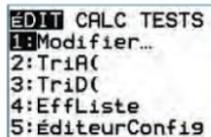
On souhaite déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés pour la série statistique à deux variables donnée ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3

Avec une calculatrice Texas

1 Saisie des données

- Accéder au mode Statistique **stats**, choisir le menu **EDIT**, sélectionner 1:Modifier... puis appuyer sur la touche **entrer**.



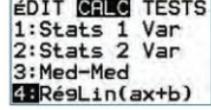
- Saisir les valeurs x_i dans une liste, par exemple L1, et les valeurs y_i dans une autre liste, par exemple L2.

L1	L2	L3	L4
1	10,6	-----	-----
2	13,1		
3	14,9		
4	17,3		
5	19,2		
6	21,8		
7	24,3		
-----	-----		

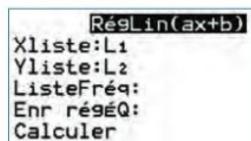
2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

- Revenir au mode Statistique en appuyant sur **stats**.
- Choisir le menu CALC.

Sélectionner 4:RégLin(ax+b) suivie de **entrer**.

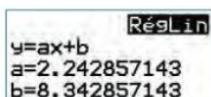


- Compléter l'écran comme ci-dessous, (touche **2nde** **1** pour obtenir L1 et **2nde** **2** pour obtenir L2).



- Sélectionner Calculer suivie de **entrer**.

Le coefficient directeur de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est a , l'ordonnée à l'origine de cette droite est b .



Avec une calculatrice Casio

1 Saisie des données

- Accéder au menu Statistique : **MENU** puis icône **STAT** et **EXE**.
- Saisir les valeurs x_i dans une liste, par exemple List1, et les valeurs y_i dans une autre liste, par exemple List2.

SUB	List 1	List 2	List 3	List 4
1	1	10,6	-----	-----
2	2	13,1		
3	3	14,9		
4	4	17,3		

2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

- Accéder au menu CALC (touche **F2**), puis au menu SET (touche **F6**).
- Choisir List 1 pour 2Var XList et List 2 pour 2Var YList, suivie de **EXE**.

```
1Var XList :List1
1Var Freq :List2
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq :1
```

LIST

List s'obtient à l'aide de la touche **F2** et on complète par le numéro de la liste, puis par **EXE**.

Sortir à l'aide de la touche **EXIT**.

- Sélectionner le menu REG (touche **F3**), puis X (touche **F1**)

X Med X² X³ X⁴ >

et **ax+b** (touche **F1**) **[ax+b][a+bx]**.

Le coefficient directeur de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est a , l'ordonnée à l'origine de cette droite est b .

```
RégrLinéaire(ax+b)
a =2.24285714
b =8.34285714
```

Équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés

On souhaite déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés pour la série statistique à deux variables donnée ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3

Avec une calculatrice NumWorks

1 Saisie des données

1. Accéder au menu **Regressions** :

 touche puis icone et ou .

2. Choisir l'onglet **Données** à l'aide des touches directionnelles .

3. Saisir les valeurs x_i dans une liste, par exemple X1, et les valeurs y_i dans une autre liste, par exemple Y1.



2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

1. Accéder à l'onglet **Stats** à l'aide des touches directionnelles, puis .



2. À l'aide des touches directionnelles, descendre dans la première colonne au niveau de **Régressions** puis lire dans la deuxième colonne le coefficient directeur a de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés et l'ordonnée à l'origine b de cette droite.



Avec un tableur

1 Saisie des données

On saisit les valeurs x_i dans la plage de cellules B1:H1 et on saisit les valeurs y_i dans la plage de cellules B2:H2.

A	B	C	D	E	F	G	H	
1	x_i	1	2	3	4	5	6	7
2	y_i	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3

2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

On calcule ensuite les coefficients de l'équation de la droite d'ajustement dans les cellules K1 et K2.

J	K
=	PENTE(B2:H2;B1:H1)
=	ORDONNEE.ORIGINE(B2:H2;B1:H1)

- Pour obtenir, dans la cellule K1, le coefficient directeur a de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés, on choisit la fonction **PENTE** à l'aide de f_x , puis on sélectionne la zone B2:H2 pour les valeurs de y et la zone B1:H1 pour les valeurs de x .

Avec Excel

Y_connus	B2:H2
X_connus	B1:H1

Avec OpenOffice

données_Y	B2:H2
données_X	B1:H1

On peut aussi saisir directement la formule

`=PENTE(B2:H2;B1:H1)` dans la cellule K1.

- Pour obtenir, dans la cellule K2, l'ordonnée à l'origine b de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés, on choisit la fonction **ORDONNEE.ORIGINE** à l'aide de f_x , puis, comme pour le coefficient directeur, on sélectionne la zone B2:H2 pour les valeurs de y et la zone B1:H1 pour les valeurs de x .

On peut aussi saisir directement la formule

`=ORDONNEE.ORIGINE(B2:H2;B1:H1)` dans la cellule K2.

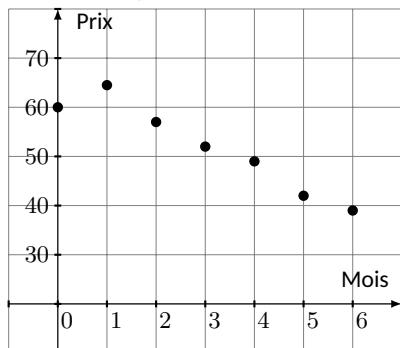
Solutions

Exemple I.1

- Les caractères étudiés sont l'altitude et la température.
- $\frac{8,6}{0,4} = 21$ et $\frac{6,5}{0,8} = 8,125$. Comme ces valeurs sont différentes, ce n'est pas un tableau de proportionnalité donc la température n'est pas proportionnelle à l'altitude.

Exemple I.2

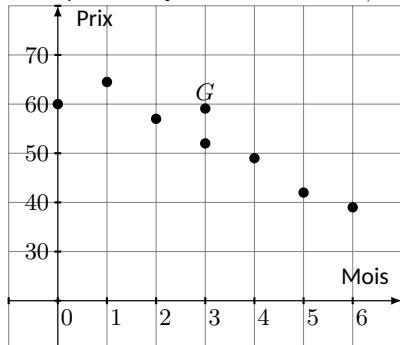
On a la représentation graphique suivante :


Exemple I.3

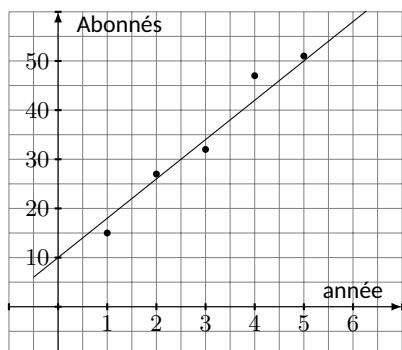
$$\bar{x} = \frac{0+1+2+3+4+5+6}{7} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{60+64,5+57+52+49+42+39}{7} \approx 51,9$$

En moyenne, le prix de ce jeu vidéo était de 51,9€.


Exemple II.1

- On peut tracer la droite suivante :



- L'équation de cette droite est de la forme $y = ax + b$.

Graphiquement, on voit que l'ordonnée à l'origine vaut 10 donc $b = 10$.

De plus, les points $A(0; 10)$ et $B(5; 50)$ appartiennent à cette droite donc le coefficient directeur est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{50 - 10}{5 - 0} = \frac{40}{5} = 8$$

L'équation de cette droite est donc $y = 8x + 10$.

- Si $x = 6$, $y = 8 \times 6 + 10 = 48 + 10 = 58$. On peut estimer qu'il y aura 58000 abonnés la 6ème année.

Exemple II.2

- Avec la calculatrice, on trouve environ $y = 2,24x + 8,34$.
- En remplaçant x par 8, on trouve : $y = 2,24 \times 8 + 8,34 = 26,26$. On peut estimer que le chiffre d'affaires sera de 26,26 millions d'euros la 8-ème année.

Statistiques à deux variables

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter un nuage de points
- Savoir tracer graphiquement une droite d'ajustement « au jugé »
- Savoir déterminer une droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés

Statistiques à deux variables

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter un nuage de points
- Savoir tracer graphiquement une droite d'ajustement « au jugé »
- Savoir déterminer une droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés

Statistiques à deux variables

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter un nuage de points
- Savoir tracer graphiquement une droite d'ajustement « au jugé »
- Savoir déterminer une droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés