

## I

## Séries statistiques à deux variables

## 1. Définition d'une série à deux variables

## Définition I.1

Dans une population, lorsqu'on étudie deux caractères  $X$  et  $Y$  simultanément, on obtient une **série statistique à deux variables**. On représente une telle série dans un tableau comme ci-dessous :

$X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$Y$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$

**Remarque** — Quand une des deux variables correspond au temps, on dit que c'est une série chronologique.

**Exemple I.1** — On a relevé la température à différentes altitudes sur une route de montagne :

Altitude (km)	0,4	0,8	1,2	1,5	1,9	2
Température (°C)	8,6	6,5	2,8	1,2	-1	-1,9

- Quels sont les caractères étudiés ?
- Peut-on dire que la température est proportionnelle à l'altitude ?

→ À rédiger

## 2. Nuage de points

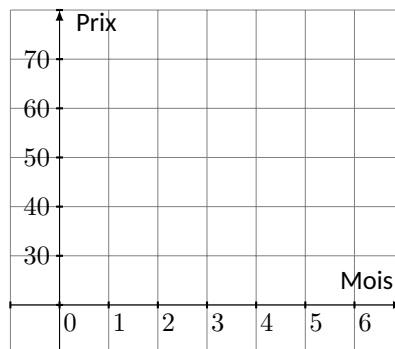
## Définition I.2

Dans une série statistique à deux variables, les points  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ , ...,  $M_n(x_n, y_n)$  s'appellent le **nuage de points** associé à cette série.

**Exemple I.2** — Un comparateur de prix sur Internet a étudié l'évolution du prix d'un jeu vidéo dans une grande enseigne suivant le temps écoulé, en mois :

Temps (mois)	0	1	2	3	4	5	6
Prix (€)	60	64,5	57	52	49	42	39

Représenter cette série statistique par un nuage de points dans le repère ci-dessous :



→ À rédiger

## 3. Point moyen

## Définition I.3

Le **point moyen** d'une série statistique à deux variables est le point  $G$  de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y})$  où  $\bar{x}$  est la moyenne des  $x_i$  et  $\bar{y}$  est la moyenne des  $y_i$ .

**Exemple I.3** — Déterminer le point moyen  $G$  de la série statistique de l'exemple précédent, le placer sur le graphique puis interpréter.

→ À rédiger

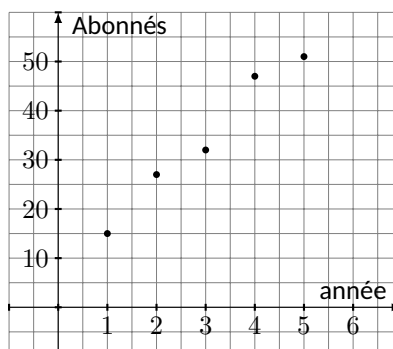
## 1. Ajustement affine d'une série à deux variables

## Définition II.1

Lorsque les points du nuage d'une série statistique à deux variables sont sensiblement alignés, on peut construire une droite passant au plus près de ces points et on dit qu'on réalise un **ajustement affine** de cette série. Cette droite s'appelle alors **droite d'ajustement** de ce nuage.

**Exemple II.1** — Le tableau suivant donne le nombre d'abonnés, en milliers, d'un opérateur téléphonique sur cinq années :

Année	1	2	3	4	5
Abonnés (en milliers)	15	27	32	47	51



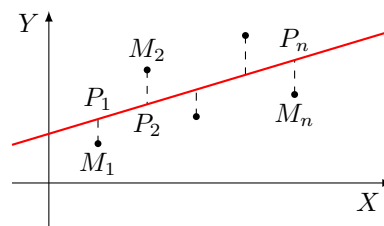
1. Tracer sur le graphique une droite passant « au plus près » de chacun des points du nuage.
2. Déterminer une équation de cette droite d'ajustement.
3. À l'aide de l'équation, estimer le nombre d'abonnés la 6ème année.

→ À rédiger

## 2. Méthode des moindres carrés

## Définition II.2

La **méthode des moindres carrés** consiste à déterminer la droite rendant la somme  $M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \dots + M_nP_n^2$  la plus petite possible.



**Remarque** — En pratique, cette droite est déterminée à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

**Exemple II.2** — On donne ci-dessous l'évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise première sur 7 ans :

Temps (années)	1	2	3	4	5	6	7
CA (millions d'euros)	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.
2. À quelle valeur peut-on estimer le chiffre d'affaires la 8ème année ?

→ À rédiger

## Équation de la droite d'ajustement de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés

On souhaite déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés pour la série statistique à deux variables donnée ci-dessous.

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$y_i$	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3

### Avec une calculatrice Texas

#### 1 Saisie des données

1. Accéder au mode Statistique **stats**, choisir le menu **EDIT**, sélectionner 1:Modifier... puis appuyer sur la touche **entrer**.

```
EDIT CALC TESTS
1:Modifier...
2:TriA(
3:TriD(
4:EffListe
5:ÉditeurConf9
```

2. Saisir les valeurs  $x_i$  dans une liste, par exemple L1, et les valeurs  $y_i$  dans une autre liste, par exemple L2.

L1	L2	L3	L4
1	10.6		
2	13.1		
3	14.9		
4	17.3		
5	19.2		
6	21.8		
7	24.3		
---	---		

#### 2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

1. Revenir au mode Statistique en appuyant sur **stats**.

2. Choisir le menu CALC.

Sélectionner 4:RégLin(ax+b) suivi de **entrer**.

```
EDIT CALC TESTS
1:Stats 1 Var
2:Stats 2 Var
3:Med-Med
4:RégLin(ax+b)
```

3. Compléter l'écran comme ci-dessous, (touche **2nde** **1** pour obtenir L1 et **2nde** **2** pour obtenir L2).

```
RégLin(ax+b)
Xliste:L1
Yliste:L2
ListeFréq:
Enr régEQ:
Calculer
```

4. Sélectionner Calculer suivi de **entrer**.

Le coefficient directeur de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés est  $a$ , l'ordonnée à l'origine de cette droite est  $b$ .

```
RégLin
y=ax+b
a=2.242857143
b=8.342857143
```

### Avec une calculatrice Casio

#### 1 Saisie des données

1. Accéder au menu Statistique :

**MENU** puis icône **STAT** et **EXE**.

2. Saisir les valeurs  $x_i$  dans une liste, par exemple List1, et les valeurs  $y_i$  dans une autre liste, par exemple List2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1	10.6		
2	2	13.1		
3	3	14.9		
4	4	17.3		

GRAPH CALC TEST INTR DIST

#### 2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

1. Accéder au menu CALC (touche **F2**), puis au menu SET (touche **F6**).

2. Choisir List 1 pour 2Var XList et List 2 pour 2Var YList, suivi de **EXE**.

```
1Var XList :List1
1Var Freq :List2
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq :1
LIST
```

List s'obtient à l'aide de la touche **F2** et on complète par le numéro de la liste, puis par **EXE**.

Sortir à l'aide de la touche **EXIT**.

3. Sélectionner le menu REG (touche **F3**), puis X (touche **F1**)

**X** **Med** **X<sup>2</sup>** **X<sup>3</sup>** **X<sup>4</sup>** **▷**

et  $ax+b$  (touche **F1**) **ax+b** **a+bx**.

Le coefficient directeur de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés est  $a$ , l'ordonnée à l'origine de cette droite est  $b$ .

```
RégLin(ax+b)
a = 2.24285714
b = 8.34285714
```




# Équation de la droite d'ajustement de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés

On souhaite déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés pour la série statistique à deux variables donnée ci-dessous.

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$y_i$	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3

## Avec une calculatrice NumWorks

### 1 Saisie des données

1. Accéder au menu **Regressions** : touche  puis l'icone  et **OK** ou **EXE**.
2. Choisir l'onglet **Données** à l'aide des touches directionnelles .
3. Saisir les valeurs  $x_i$  dans une liste, par exemple **X1**, et les valeurs  $y_i$  dans une autre liste, par exemple **Y1**.



	X1	Y1	X2
1	1	10.6	
2	2	13.1	
3	3	14.9	
4	4	17.3	
5	5	19.2	
6	6	21.8	
7	7	24.3	

### 2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

1. Accéder à l'onglet **Stats** à l'aide des touches directionnelles, puis **OK**.



	X1
Moyenne	4
Somme	28

2. À l'aide des touches directionnelles, descendre dans la première colonne au niveau de **Régressions** puis lire dans la deuxième colonne le coefficient directeur  $a$  de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés et l'ordonnée à l'origine  $b$  de cette droite.

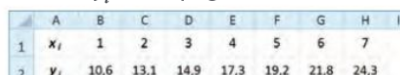


Régression	$y = a \cdot x + b$
a	2.242857
b	8.342857

## Avec un tableur

### 1 Saisie des données

On saisit les valeurs  $x_i$  dans la plage de cellules **B1:H1** et on saisit les valeurs  $y_i$  dans la plage de cellules **B2:H2**.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	
2	$y_i$	10,6	13,1	14,9	17,3	19,2	21,8	24,3	

### 2 Calcul des coefficients de l'équation de la droite

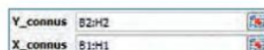
On calcule ensuite les coefficients de l'équation de la droite d'ajustement dans les cellules **K1** et **K2**.



	J	K
a=		2,242857143
b=		8,342857143

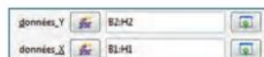
- Pour obtenir, dans la cellule **K1**, le coefficient directeur  $a$  de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés, on choisit la fonction **PENTE** à l'aide de  $f_x$  puis on sélectionne la zone **B2:H2** pour les valeurs de  $y$  et la zone **B1:H1** pour les valeurs de  $x$ .

#### Avec Excel



<b>Y_connaus</b>	B2:H2
<b>X_connaus</b>	B1:H1

#### Avec OpenOffice



données_Y	B2:H2
données_X	B1:H1

On peut aussi saisir directement la formule

**=PENTE(B2:H2;B1:H1)** dans la cellule **K1**.

- Pour obtenir, dans la cellule **K2**, l'ordonnée à l'origine  $b$  de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés, on choisit la fonction **ORDONNEE.ORIGINE** à l'aide de  $f_x$  puis, comme pour le coefficient directeur, on sélectionne la zone **B2:H2** pour les valeurs de  $y$  et la zone **B1:H1** pour les valeurs de  $x$ .

On peut aussi saisir directement la formule

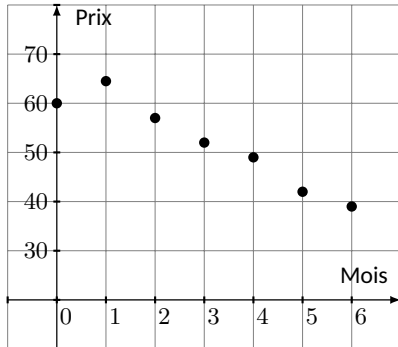
**=ORDONNEE.ORIGINE(B2:H2;B1:H1)** dans la cellule **K2**.

## Exemple I.1

- Les caractères étudiés sont l'altitude et la température.
- $\frac{8,6}{0,4} = 21$  et  $\frac{6,5}{0,8} = 8,125$ . Comme ces valeurs sont différentes, ce n'est pas un tableau de proportionnalité donc la température n'est pas proportionnelle à l'altitude.

## Exemple I.2

On a la représentation graphique suivante :

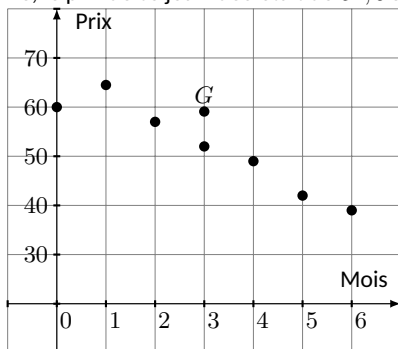


## Exemple I.3

$$\bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{7} = 3$$

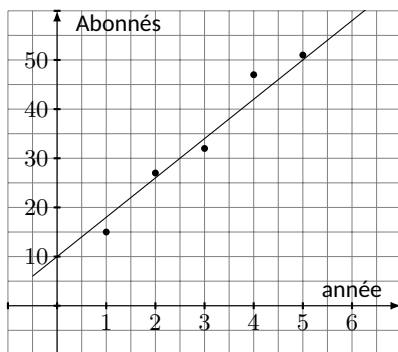
$$\bar{y} = \frac{60 + 64.5 + 57 + 52 + 49 + 42 + 39}{7} \approx 51,9$$

En moyenne, le prix de ce jeu vidéo était de 51,9€.



## Exemple II.1

- On peut tracer la droite suivante :



- L'équation de cette droite est de la forme  $y = ax + b$ . Graphiquement, on voit que l'ordonnée à l'origine vaut 10 donc  $b = 10$ .  
De plus, les points  $A(0; 10)$  et  $B(5; 50)$  appartiennent à cette droite donc le coefficient directeur est  

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{50 - 10}{5 - 0} = \frac{40}{5} = 8$$
L'équation de cette droite est donc  $y = 8x + 10$ .
- Si  $x = 6$ ,  $y = 8 \times 6 + 10 = 48 + 10 = 58$ . On peut estimer qu'il y aura 58000 abonnés la 6ème année.

## Exemple II.2

- Avec la calculatrice, on trouve environ  $y = 2,24x + 8,34$ .
- En remplaçant  $x$  par 8, on trouve :  $y = 2,24 \times 8 + 8,34 = 26,26$ . On peut estimer que le chiffre d'affaires sera de 26,26 millions d'euros la 8-ème année.

## Statistiques à deux variables

---

**A savoir faire à la fin du chapitre.**

- Savoir représenter un nuage de points
- Savoir tracer graphiquement une droite d'ajustement « au jugé »
- Savoir déterminer une droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés

## Statistiques à deux variables

---

**A savoir faire à la fin du chapitre.**

- Savoir représenter un nuage de points
- Savoir tracer graphiquement une droite d'ajustement « au jugé »
- Savoir déterminer une droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés

## Statistiques à deux variables

---

**A savoir faire à la fin du chapitre.**

- Savoir représenter un nuage de points
- Savoir tracer graphiquement une droite d'ajustement « au jugé »
- Savoir déterminer une droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés