Logarithme décimal d'un nombre

Exercice 1
Donner les valeurs des nombres suivants :

1. $\log(10^{2,5})$
2. $\log(10^{-1})$
3. $\log(10^{7,2})$
4. $\log(0,01)$

Exercice 2
Déterminer les nombres suivants :

1. $\log(10^2 \times 10^{-1})$
2. $\log(10^6 \times 10^{-4})$
3. $\log(10^{-3} \times 10^{-2})$
4. $\log(10000 \times 0,01)$

Exercice 3
La loi de Benford est largement utilisée pour détecter des fraudes fiscales, comptables, etc. Elle repose sur la fréquence d'apparition des différents chiffres dans les valeurs numériques. Ainsi, Benford a constaté que, dans une liste de données statistiques, le premier chiffre non nul est 1 dans plus du tiers des observations. Puis le 2 est plus fréquent que le 3, etc. La probabilité d'obtenir 9 n'est que de $0,046$. De façon générale, la loi donne comme fréquence théorique p d'apparition du premier chiffre a d'un nombre : $p = \log\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)$.
Compléter le tableau afin de déterminer la fréquence (en %) d'apparition des différents chiffres non nuls en utilisant la loi de Benford.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p									

Résolution d'équations

Exercice 4
Résoudre dans $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

1. $10^x = 4$
2. $10^x = 237$
3. $5 \times 10^x = 59$

Exercice 5
Résoudre dans $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

1. $\log(x) = 8$
2. $\log(x) = 0,58$
3. $\log(x) = \frac{2}{3}$
4. $4\log(x) = 35$

Exercice 6
Résoudre dans $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

1. $3,2 + 2 \times 10^x = 4,5 \times 10^x$
2. $10\log(x) + 5 = 3\log(x)$
3. $\log\left(\frac{x}{3}\right) = 2$
4. $10^{3x} = 54$.

Exercice 7
Une souche de la bactérie Escherichia coli voit sa population multipliée par 10 toutes les heures. On modélise cette évolution par la fonction p définie par $p(t) = 10^t$ où t est le temps (en heures). À $t = 0$, il y a une bactérie. Déterminer le temps nécessaire pour que la population atteigne les 500 individus. Donner le résultat en heures à 10^{-2} près.

Sens de variation de la fonction logarithme

Exercice 8
Soit a un nombre strictement positif tel que $\log(a) \approx 12,3$.

1. Encadrer $\log(a)$ par deux entiers consécutifs.
2. Justifier que $10^{12} < a < 10^{13}$.

Exercice 9
Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

1. $\log(0,01)$, $\log(1,1)$, $\log(1,001)$ et $\log(0,001)$.
2. $\log(0,2)$, $\log(0,04)$, $\log(0,25)$ et $\log(0,391)$.

Exercice 10
Compléter en utilisant le symbole $>$ ou $<$:

1. $\log(23)\ldots.\log(10^2)$
2. $\log(0,125)\ldots\log(5 \times 10^{-3})$

Exercice 11

1. Encadrer le nombre 1789 par deux puissances de 10.
2. En déduire que $3 < \log(1789) < 4$

Exercice 12

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Pour quelles valeurs de a le nombre $\log(a)$ est-il strictement négatif ?
2. Parmi les nombres suivants, lesquels sont négatifs ? Justifier.
   $\log(0,2)$, $\log(1,6)$, $\log(5,01)$ et $\log(0,9)$

Exercice 13
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x\log(5) \geqslant 3$
2. $x\log(0,99) \leqslant 10$

Exercice 14

1. Déterminer $\log(10^3)$.
2. Le niveau sonore (en décibel dB) émis par un TGV à pleine vitesse qui passe à une distance d (en m) est : $L = 120 - 20\log(d)$. On souhaite construire un hôpital à côté d'une ligne de TGV. Cela n'est possible que si le bruit est inférieur à 60dB.
   (a) Montrer que cela revient à résoudre l'inéquation $\log(10^3) \leqslant \log(d)$.
   (b) Déterminer la distance minimale entre un hôpital et une ligne de TGV.

Exercice de type E3C

Exercice 15
Charles Francis Richter, sismologue américain (1900-1985), créa en 1935 une échelle afin de classer les séismes. Ceux-ci y sont classés selon leur magnitude M. Depuis, d'autres échelles ont été créées avec différents types de magnitudes. Ici, on considère la magnitude liée à l'énergie. L'énergie E (en joule, J) libérée lors d'un séisme de magnitude M est : $\log(E) = 4,5 + 1,5M$.

1. (a) Déterminer l'énergie libérée par le séisme de Sumatra (Indonésie), le 24/12/2004, sachant que sa magnitude est de 9,3.
   (b) L'explosion de la bombe atomique Little Boy, lâchée sur Hiroshima le 6 août 1945, a dégagé une énergie de $6,3 \times 10^{13} J$. Exprimer l'énergie dégagée par le séisme de Sumatra en fonction de celle dégagée par Little Boy.
2. Classer les séismes ci-dessous, en fonction de l'énergie dégagée (du plus grand au plus petit).
   (a) Haïti, le 12/01/2010, séisme d'une magnitude de 7
   (b) Montendre (près de Bordeaux), le 20/03/2019, séisme d'une énergie de $7,08 \times 10^{11} J$
   (c) Katmandou (Népal), le 25/04/2015, séisme 355 fois plus énergétique que Little Boy
3. Compléter la phrase suivante : « Entre un séisme de magnitude 4 et un séisme de magnitude 8, l'énergie dégagée est multipliée par ... »