Fonction logarithme décimal (1ère partie)— Activité

Fonction logarithme décimal

Un virus informatique se propage sur les ordinateurs via un e-mail comportant une fausse pièce-jointe : un clic pour ouvrir la pièce-jointe contamine l'ordinateur depuis lequel est lu le message. On estime que chaque heure, le nombre d'ordinateurs infectés est multiplié par 10. La ville de Downtown, où se propoge le virus, compte plus de 50000 ordinateurs, que ce soit chez les particuliers ou dans les entreprises.

1. On note a_n le nombre d'ordinateurs infectés à la n-ème heure. On pose $n = 0$ l'instant où le premier ordinateur a été infecté. Ainsi, $a_0 = 1$.
   (a) Déterminer les valeurs des termes a_1 et a_2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
   (b) Exprimer a_n en fonction de n.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto 10^x$ définie sur $[0; 10]$. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	1	2		4	5
$f(x)$				1000		

3. On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée $\log$, définie sur $]0; +\infty[$ telle que $\log(10^x) = x$. Ainsi, $10^x = y$ si, et seulement si, $y = \log(x)$. Par exemple, $\log(10^3) = 3$ et $\log(10^2) = 2$.
   Quelle est la valeur de $\log(1)$? De $\log(10)$?
4. À l'aide de la calculatrice et de la touche $\log$, recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant éventuellement à $0,01$ près :

y	10000	20000	30000	40000	50000	55000	60000
$\log(y)$							

5. (a) En utilisant ce tableau, dire au bout de combien de temps seront infectés tous les ordinateurs de la ville. Donner le résultat en heures, puis en heures et minutes.
   (b) De quelle équation ce résultat est-il une solution approchée ?

Sens de variation de la fonction logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \log(x)$. f est la fonction logarithme décimal.

1. Tracer la courbe de cette fonction sur une calculatrice. On se placera sur l'intervalle $]0; 10]$.
2. Quel semble être le sens de variations de la fonction logarithme décimal ?
3. (a) Comparer les nombres suivants :
      - $\log(3,5)$ et $\log(3,05)$
      - $\log(\sqrt{2})$ et $\log(1,4)$
      - $\log(3)$ et $\log(\pi)$
   (b) Sachant que $\log(1) = 0$, en déduire le signe de $\log(x)$ lorsque $x > 1$ et le signe de $\log(x)$ lorsque $x < 1$.
   (c) En déduire le tableau de signes de la fonction logarithme décimal sur $]0; +\infty[$.