Rappels sur les variables aléatoires

Exercice 1
Une entreprise produit des écrans pour tablettes numériques. Ces écrans peuvent présenter deux défauts : un défaut de dimensions ou un défaut de résistance aux chocs. La probabilité qu'un écran pris au hasard présente uniquement un défaut est $0,07$. La probabilité qu'il présente deux défauts est $0,04$. Soit X la variable aléatoire qui, à tout écran de cette production pris au hasard, associe le nombre de défauts.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

Exercice 2
On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$0,3$	$0,25$	$0,20$	$0,10$	$0,10$	$0,05$

1. Donner la valeur de $P(X = 2)$.
2. Quelles sont les issues favorables à l'événement $\{X \leqslant 2\}$.
3. Calculer $P(X \leqslant 2)$.
4. Quelle est la probabilité que X soit au moins égale à 2 ?

Exercice 3
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque élève de Terminale, associe le nombre de connexions un jour donné à l'ENT de son lycée. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous, a étant un nombre réel.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$0,15$	$0,38$	$0,35$	a	$0,03$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. La valeur de a est $0,09$.
2. $P(X \leqslant 2) = 0,53$
3. La probabilité que l'élève se connecte au moins une fois est égale à $0,85$.

Exercice 4
Camille va voir un film au cinéma au plus cinq fois par mois. On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre de films vus pendant le mois. La loi de probabilité de N est donnée ci-dessous, où a est un réel.

n_i	0	1	2	3	4	5
$P(N = n_i)$	$0,16$	$0,28$	a	$0,07$	$0,3$	$0,1$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Quelle est la probabilité que Camille visionne au moins 3 films ?
3. Quelle est la probabilité que Camille visionne au plus 4 films ?

Exercice 5
On considère la fonction Python `jeu` ci-dessous, dans lequelle la variable `gain` représente un gain en euros.

```
from random import randint

def jeu():
    result = randint(1,6)
    if result == 1:
        gain = 5
    else:
        if result > 4:
            gain = 3
        else:
            gain = -1
    return gain
```

1. On suppose que l'instruction `randint(1,6)` renvoie 2. Que renvoie l'appel `jeu()` dans ce cas ?
2. Décrire le jeu simulé par cette fonction.
3. Soit G la variable aléatoire qui prend les valeurs de la variable gain. Déterminer la loi de probabilité de G.

Espérance d'une variable aléatoire

Exercice 6
Romane décide d'inventer un jeu pour une kermesse. Le joueur lance un dé bien équilibré. S'il obtient un 6, Romane lui donne 10€ ; si le dé indique 4 ou 5, Romane lui donne 5€ ; sinon, le joueur donne 2€ à Romane. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X. L'interpréter.
3. Romane décide de changer les règles : elle donne toujours 10€ pour l'obtention d'un 6, mais seulement 1€ si le joueur obtient un 4 ou un 5. Dans les autres cas, le joueur donne 4€ à Romane. Ce jeu est-il alors équitable ?

Exercice 7
Un camping propose, en supplément de ses hébergements, deux activités : l'accès à la piscine et l'accès au terrain de golf. Le directeur a constaté que chaque année, 90% des campeurs prennent l'accès à la piscine au prix de 2€ par personne et 40% des campeurs prennent l'accès au terrain de golf au prix de 12€ par personne. Le choix de l'une des activités est indépendante de l'autre. On note X la variable aléatoire égale au prix payé par un campeur pour ses activités sur le camping.

1. Représenter l'arbre pondéré illustrant cette situation. On notera P l'événement « Le campeur prend l'accès à la piscine » et G l'événement « Le campeur prend l'accès au golf ».
2. Calculer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 8
Une usine produit trois types d'ampoules : les défectueuses qui seront détruites (10% de la production) et rapporteront donc 0€, les ampoules haute performance vendues 3€ pièce au détaillant (30% de la production), le reste de la production étant vendu 1€ pièce au détaillant. Soit Y la variable aléatoire égale au prix d'une ampoule prise au hasard dans la production.

1. Donner la loi de probabilité de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y. En donner une interprétation.
3. Sachant que la production d'une ampoule revient à $0,50$€, quel est le bénéfice moyen réalisé par le fabricant ?

Exercice 9
Julie propose un jeu à son frère Adam. Elle a mis 3 jetons dans un sac : un bleu, un vert et un rouge. Adam doit tirer au hasard deux fois de suite un jeton du sac en remettant dans le sac le premier jeton tiré avant d'effectuer le second tirage.

- Si les deux jetons tirés sont verts, Adam gagne 30 points.
- Sinon, il perd 3 points.

1. Quelle est la probabilité de tirer le jeton vert au 1er tirage ?
2. Représenter par un arbre de probabilité l'expérience aléatoire correspondant au tirage de ces deux jetons.
3. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par Adam lorsqu'il joue une fois à ce jeu, en comptant négativement les points lorsqu'il perd.
   (a) Donner la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.

Julie modifie les règles afin de jouer à un deuxième jeu :

- Si les deux jetons tirés sont identiques, Adam gagne 9 points ;
- Sinon, il perd 3 points.

On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par Adam lorsqu'il joue une fois à ce deuxième jeu. On admet que la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

k	9	-3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

4. Adam affirme qu'il gagnera globalement plus de points en jouant souvent au premier jeu plutôt qu'au deuxième. Que pensez-vous de son affirmation ? Justifier.

Exercice 10
Lors d'une loterie, un joueur fait tourner une roue divisée en neuf secteurs égaux numérotés de 1 à 9. S'il tombe sur le secteur portant le numéro 1, il gagne 6€. Sinon, il relance la roue : s'il tombe sur un secteur portant un numéro entre 1 et 4, il gagne 4€. Sinon il ne gagne rien. On considère la fonction Python `jeu` renvoyant le gain du joueur avec la variable gain. La variable `lancer1` contient le numéro du secteur obtenu lors du premier tour de roue, et la variable `lancer2` celui obtenu lors du second tour de roue. On considère également la fonction Python `gain_moyen` incomplète donnée ci-dessous :

```
from random import randint

    def jeu():
        lancer1 = randint(1,9)
        if lancer1 == 1:
            gain = 6
        else:
            lancer2 = randint(1,9)
            if lancer2 <= 4:
                gain = 4
            else:
                gain = 0
        return gain

    def gain_moyen(n):
        gain_total = ....
        for i in range(......):
            gain_total = .... + jeu()
        return gain_total/......
```

1. (a) On suppose que l'appel `lancer1 = randint(1,9)` renvoie 1. Détailler l'exécution de la fonction `jeu`.

   (b) Si la variable `lancer1 = randint(1,9)` renvoie 3 et que l'appel `lancer2 = randint(1,9)` renvoie 5, que contient la variable gain ?

   (c) On suppose que l'appel `lancer1 = randint(1,9)` renvoie 2, puis que l'appel `lancer2 = randint(1,9)` renvoie 3. Quelle est la valeur retournée par l'appel `jeu()` ?

2. Soit X la variable aléatoire associée au gain du joueur. Quelle est la valeur de $P(X = 4)$?

3. Le joueur doit en fait payer 1€ pour jouer. Que doit-on modifier dans la fonction `jeu` ?

4. Compléter le script de la fonction `gain_moyen` afin qu'elle renvoie le gain moyen d'un joueur quand on effectue n parties.

Exercice de type E3C

Exercice 11
On a effectué une enquête sur les destinations des vacances. Quelle que soit la personne interrogée, la probabilité qu'elle choisisse des vacances au bord de mer est égale à $0,5$, qu'elle choisisse une randonnée en montagne est égale à $0,3$ sinon elle reste à son domicile.
On note les événements suivants : M : « La personne a choisi le bord de mer » , R : « La personne choisit la randonnée en montagne » et D : « La personne reste à son domicile » . On rencontre successivement deux personnes interrogées durant cette enquête et on suppose que leurs réponses sont indépendantes.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi des vacances à la mer.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer la probabilité qu'une personne au moins ait choisi des vacances à la mer.
   (d) Calculer l'espérance de X.