

I Rappels sur les variables aléatoires

1. Définition d'une variable aléatoire

Définition I.1

On considère une expérience aléatoire. Une variable aléatoire X est une fonction qui, à chaque issue, lui associe un nombre.

Exemple I.1 — On lance simultanément deux pièces de monnaie. Le joueur gagne 2€ pour chaque « Pile » obtenu et il perd 1€ pour chaque « Face ». On note X la variable aléatoire qui, à chaque lancer de deux pièces, associe le gain. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ?

→ À rédiger

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition I.2

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est une fonction qui, à chaque valeur x_i , associe la probabilité $P(X = x_i)$ que X prenne cette valeur.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est représentée sous forme d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	\cdots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\cdots	p_n

Exemple I.2 — On lance un dé bien équilibré. Si le nombre obtenu est 1, on gagne 10€. Si c'est 2 ou 3, on gagne 5€. Sinon, on perd 2€. On note X la variable aléatoire égale au gain.

1. Donner les valeurs de X .
2. Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

→ À rédiger

II Espérance d'une variable aléatoire

Définition II.1

L'espérance d'une variable aléatoire X est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$$

Exemple II.1 — On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-5	1	4
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X .

→ À rédiger

Proposition II.2

L'espérance d'une variable aléatoire X représente la valeur moyenne de X si on répétait l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple II.2 — Un jeu consiste à tirer une boule au hasard dans une urne contenant 1 boule rouge, 10 boules bleues et 5 boules vertes. Une boule rouge rapporte 10€, une bleue rapporte 1€ et une boule verte ne rapporte aucun gain. Pour participer à ce jeu, il faut payer 2€.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Déterminer l'espérance de X .
3. Est-il intéressant de jouer à ce jeu ? Justifier la réponse.

→ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

- $(P, P) \mapsto 4$
- $(P, F) \mapsto 1$
- $(F, P) \mapsto 1$
- $(F, F) \mapsto -2$

Les valeurs de la variable aléatoire X sont donc $-2, 1$ et 4 .

Exemple I.2

1. Les valeurs sont $-2, 5$ et 10 .

2. La loi de probabilité de X est :

x_i	-2	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple II.1

$$E(X) = 0,3 \times (-5) + 0,5 \times 1 + 0,2 \times 4 = -0,2$$

Exemple II.2

1. Les valeurs sont $8, -1$ et -2 . La loi de probabilité de X est :

x_i	-2	-1	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$2. E(X) = \frac{5}{16} \times (-2) + \frac{10}{16} \times (-1) + \frac{1}{16} \times 8$$

donc $E(X) = \frac{-10}{16} - \frac{10}{16} + \frac{8}{16} = \frac{-12}{16} = -0,75$

3. En moyenne, un joueur perdra $0,75\text{€}$ à chaque partie. Il n'est donc pas intéressant de jouer à ce jeu.

Variables aléatoires

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer les valeurs d'une variable aléatoire
- Savoir déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Savoir déterminer l'espérance d'une variable aléatoire et l'interpréter

Variables aléatoires

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer les valeurs d'une variable aléatoire
- Savoir déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Savoir déterminer l'espérance d'une variable aléatoire et l'interpréter

Variables aléatoires

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer les valeurs d'une variable aléatoire
- Savoir déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Savoir déterminer l'espérance d'une variable aléatoire et l'interpréter