CHAPITRE 5

Fonctions exponentielles (1ère partie)

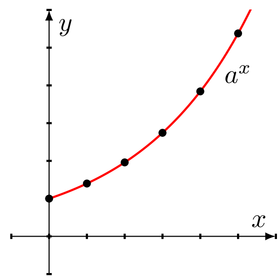
I Fonctions exponentielles de base a

1. Définition des fonctions exponentielles

Définition I.1

Soit a un nombre réel strictement positif. La **fonction exponentielle de base** a est la fonction obtenue en prolongeant aux réels positifs la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison a.

La fonction exponentielle de base a a pour expression $f(x) = a^x$.



Exemple I.1 — On considère la fonction exponentielle de base $1,2$ qu'on note f.

1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Avec une calculatrice, calculer les valeurs approchées des images par f des nombres 3, $2/3$ et $4,5$. → À rédiger

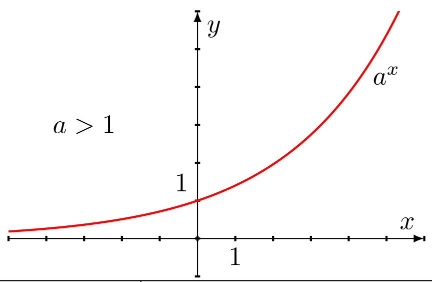
Définition I.2

L'image d'un nombre x négatif par la fonction exponentielle est obtenue grâce à la relation $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$.

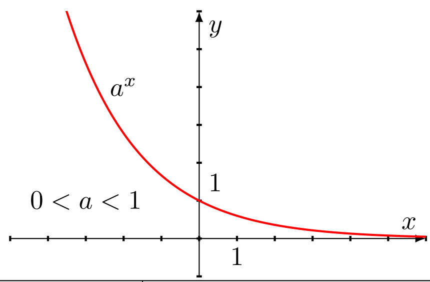
Exemple I.2 — Déterminer les images de -4, -2 et $-0,75$ par la fonction exponentielle de base $0,8$. → À rédiger

2. Sens de variations et représentation graphique

Proposition I.3



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = a^x$	0 ↗ $+\infty$



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = a^x$	$+\infty$ ↘ 0

Remarque — Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle de base 1 est constante car $1^x = 1$.

Exemple I.3 — Déterminer le sens de variations sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto 1,2^x$ $\qquad$ 2. $g : x \mapsto 0,4^x$ $\qquad$ 3. $h : x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ → À rédiger

Exemple I.4 — Ranger dans l'ordre croissant les nombres $0,2^3$; $0,2^{-1}$; $0,2^{0,5}$; $0,2^2$ et 1.
Justifier la réponse. → À rédiger

II Fonctions de la forme ka^x

Proposition II.1

Soit k un nombre réel non nul.

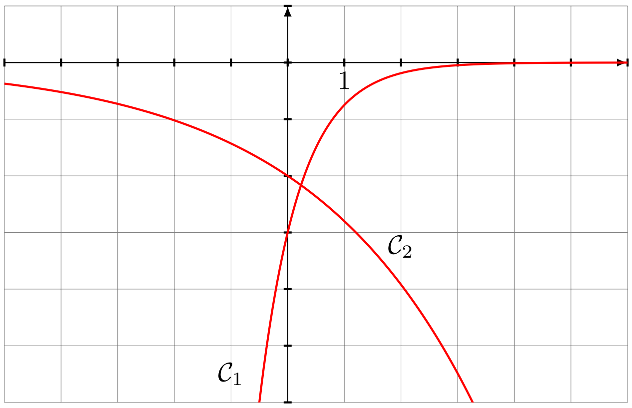
- Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto a^x$.
- Si $k < 0$, la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le sens de variation contraire de celui de la fonction $x \mapsto a^x$.

Exemple II.1 — Déterminer le sens de variations de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto 3 \times 1,2^x$
2. $g : x \mapsto 1,3 \times 0,9^x$
3. $h : x \mapsto -0,5 \times 4^x$
4. $k : x \mapsto -5 \times 0,6^x$

→ À rédiger

Exemple II.2 — On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 \times 1,4^x$ et $g(x) = -3 \times 0,25^x$. On donne ci-dessous les courbes représentatives de ces fonctions :



Associer à chaque courbe la fonction qui correspond, en justifiant la réponse.

→ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $f(x) = 1,2^x$
2. $f(3) = 1,2^3 = 1,728$
   $f(2/3) = 1,2^{2/3} \approx 1,129$
   $f(4,5) = 1,2^{4,5} \approx 2,272$

Exemple I.2

$f(x) = 0,8^x$ donc :

$f(-4) = 0,8^{-4} = \dfrac{1}{0,8^4} \approx 2,441$

$f(-2) = 0,8^{-2} = \dfrac{1}{0,8^2} = 1,5625$

$f(-0,75) = 0,8^{-0,75} = \dfrac{1}{0,8^{0,75}} \approx 1,182$

Exemple I.3

1. Comme $1,2 > 1$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Comme $0 < 0,4 < 1$, la fonction d est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple I.4

Comme $0 < 0,2 < 1$, la fonction $x \mapsto 0,2^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Les images sont donc rangées dans l'ordre décroissant par rapport aux antécédents.

$0,2^3 < 0,2^2 < 0,2^{0,5} < 0,2^0 < 0,2^{-1}$

Remarque : $0,2^0 = 1$.

Exemple II.1

1. Comme $3 > 0$ et que $x \mapsto 1,2^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Comme $1,3 > 0$ et que $x \mapsto 0,9^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Comme $-0,5 < 0$ et que $x \mapsto 4^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. Comme $-5 < 0$ et que $x \mapsto 0,6^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple II.2

Comme $-2 < 0$ et que $x \mapsto 1,4^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_2$.

Comme $-3 < 0$ et que $x \mapsto 0,25^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors g est croissante sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_1$.

Fonctions exponentielles (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir qu'une fonction exponentielle de base a prolonge une suite géométrique de raison a
- Savoir calculer une image par une fonction exponentielle
- Connaître le sens de variation des fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$ en fonction de a
- Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$,selon le signe de k et les valeurs de a

Fonctions exponentielles (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir qu'une fonction exponentielle de base a prolonge une suite géométrique de raison a
- Savoir calculer une image par une fonction exponentielle
- Connaître le sens de variation des fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$ en fonction de a
- Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$,selon le signe de k et les valeurs de a

Fonctions exponentielles (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir qu'une fonction exponentielle de base a prolonge une suite géométrique de raison a
- Savoir calculer une image par une fonction exponentielle
- Connaître le sens de variation des fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$ en fonction de a
- Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$,selon le signe de k et les valeurs de a