Moyenne géométrique

Exercice 1

1. Justifier que la moyenne géométrique des nombres 8 et 18 est 12.
2. Justifier que la moyenne géométrique des nombres $0,8$ et $1,25$ est 1.

Exercice 2

Dans un pays, au mois de janvier, les prix ont augmenté de $0,9\%$, puis en février de $1,2\%$.

1. Déterminer les deux coefficients multiplicateurs associés à ces augmentation.
2. Déterminer la moyenne géométrique de ces coefficients multiplicateurs.
3. En déduire l'augmentation mensuelle constante qu'il y aurait dû y avoir pendant les deux mois pour obtenir le même résultat à l'issue des deux mois.

Suites géométriques

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,75u_n$.

1. Quelle est la nature de cette suite ?
2. Déterminer u_1 et u_2.
3. On considère l'algorithme suivant :

   $U \leftarrow 20$
   $N \leftarrow 0$
   Tant que $U < 70$
   $\quad U \leftarrow 1,75 \times U$
   $\quad N \leftarrow N + 1$
   Fin tant que

   Recopier et compléter le tableau suivant qui retrace les différentes étapes de l'exécution de cet algorithme. On ajoutera autant de lignes que nécessaire.

U	N	$U < 70$?
20	0	Oui
...	...	...

Exercice 4

On place un capital $C_0 = 1000$€ à 1% par an avec intérêts composés (cela signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que l'année suivante ils rapportent aussi des intérêts). On C_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Calculer C_1.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. Quelle est la nature de cette suite ?
3. Quel sera le capital au bout de 3 ans ?

Exercice 5

1. Déterminer la raison de la suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 14$ et $u_1 = 17,5$.
2. Déterminer la raison de la suite géométrique (v_n) telle que $u_{18} = 80$ et $u_{19} = 64$.

Exercice 6

Dans chaque cas, déterminer si les trois nombres donnés sont les termes consécutifs d'une suite géométrique :

1. $a = 12, b = 14$ et $c = 17$
2. $x = 200, y = 180$ et $z = 162$

Exercice 7

Dans un laboratoire, on introduit initialement 1000g de bactéries dans une cuve de milieu nutritif. Le jour suivant, la masse de bactéries est de 1150g et, le troisième jour, elle est de $1322,5$g. L'évolution de la masse de bactéries peut-elle être modélisée par une suite géométrique ?

Expression du terme de rang n d'une suite géométrique

Exercice 8

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Donner l'expression du terme général de la suite (u_n).
2. En déduire la valeur de u_{10}.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1000000$.

Exercice 9

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 365$ et, pour tout entier naturel n non nul, par $v_{n+1} = 0,72v_n$.

1. Donner l'expression du terme général de la suite (v_n).
2. En déduire la valeur approchée à $0,01$ près de v_{20}.

Exercice 10

Pour les besoins de sa recherche, une biologiste met en culture une population de 10 milliers de bactéries dans un milieu adapté à sa prolifération. Elle estime que la population de bactéries augmente de 3% par minute environ. On note (u_n) la suite qui modélise l'évolution du nombre de bactéries au bout de n minutes après le début de l'expérience.

1. Donner u_0.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite ?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
4. Combien y aura-t-il de bactéries au bout de 5 minutes ?
5. Pour la suite de son expérience, la biologiste a besoin que la population de bactéries atteigne le nombre de 30000. Combien de minutes devra-t-elle attendre ?

Exercice 11

On administre à un patient un médicament par voie intraveineuse. la concentration du produit actif est quasi immédiatement maximale après l'injection, diminue de 3% par minute. On notera C_0 concentration à l'instant $t = 0$ minute et C_n la concentration en mg.L^{-1} au bout de n minutes. On pose $C_0 = 1$.

1. Justifier que la suite (C_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.
2. Exprimer C_n en fonction de n.
3. Avec une calculatrice, déterminer à partir de quelle valeur de n la concentration du produit actif aura diminué de moitié.
4. On considère un premier algorithme en langage Python :

```
k = 1
for i in range(5):
    i = i + 1
    k = 0.97 * k
print(k)
```

   (a) Quelle est la valeur de `k` affichée à l'issue de cet algorithme ? On arrondira à $0,0001$ près.

   (b) Quelle interprétation peut-on donner de cette valeur de `k` en termes de concentration du médicament ?

5. On considère maintenant un deuxième algorithme écrit en langage Python :

```
k = 1
i= 0
while k > 0.5 :
    i = i + 1
    k = 0.97 * k
print(i)
```

   (a) Expliquer pourquoi cet algorithme exécutera plus de 5 itérations de la boucle « Tant que ».

   (b) Programmer cet algorithme. Quel résultat l'exécution de cet algorithme permet-elle de retrouver ?

Somme des termes d'une suite géométrique

Exercice 12
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 64$ et de raison $q = 3$. Calculer la somme des quatre premiers termes de cette suite.

Exercice 13
Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 30000$ et de raison $q = 0,7$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.

Exercice 14
Soit u_n la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.

1. Montrer que $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = 5 \times \left(2^{11} - 1\right)$.
2. En déduire la valeur de S.

Exercice 15
Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2500$ et de raison $q = 0,8$.

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} v_k$.
2. La fonction ci-dessous écrite en langage Python permet de retrouver le résultat précédent. Compléter les parties manquantes de cette fonction.

```
def somme(n):
    v = ....
    S = ....
    for k in range(......):
        v = 0.8 * v
        S = ....
    return S
```

Exercices de type E3C

Exercice 16
Louna envisage de mettre de l'argent de côté en vue d'un achat. Elle imagine deux plans d'épargne sur 12 mois :

- Plan 1 : le premier versement mensuel est de 400€ et, chaque mois, les versements mensuels diminuent de 30€ par rapport au mois précédent ;
- Plan 2 : le premier versement mensuel est de 400€ et, chaque mois, les versements mensuels diminuent de 10% par rapport au mois précédent.

Partie A ; utilisation d'un tableur
Louna utilise une feuille de calcul pour comparer les deux plans. On donne ci-dessous un extrait de la feuille de calcul qu'elle a créée. La colonne C est au format nombre décimal à deux décimales.

	A	B	C
1	Versement n°	Plan 1	Plan 2
2	1	400,00	400,00
3	2	370,00	360,00
4	3		
...	...	...	...
12	11		
13	12		
14	Total		2870,28

1. Quelle formule, à recopier dans la place C4 :C13, Louna a-t-elle saisie dans la cellule C3 ?
2. Quelle valeur pourra-t -on lire dans la cellule C4 ?
3. Quelle formule Louna peut-elle saisir dans la cellule B14 pour obtenir le montant total des 12 versements mensuels du Plan 1 ?

Partie B : comparaison des deux suites

1. On note u_n le montant du n-ème versement mensuel du plan 1. Ainsi, $u_0 = 400$ et $u_2 = 370$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Déterminer sa raison.
   (b) Calculer u_{12}.
   (c) Calculer la somme totale épargnée avec le plan 1.
2. On note v_n le montant du n-ème versement mensuel du plan 2. Ainsi, $v_0 = 400$ et $v_2 = 360$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Déterminer sa raison.
   (b) Calculer v_{12}. On arrondira le résultat au centime d'euro.
   (c) Calculer la somme totale épargnée avec le plan 2.
3. Quel est le plan qui assure à Louna la somme épargnée la plus élevée ? Expliquer la réponse.

Exercice 17
Le diabète de type 1 est une maladie qui apparaît le plus souvent durant l'enfance ou l'adolescence. Les individus atteints par cette maladie produisent très peu ou pas du tout d'insuline, une hormone essentielle pour l'absorption du glucose sanguin dans l'organisme. Le nombre d'enfants français atteints de diabète de type-1 a été relevée au cours des 3 dernières années.

Année	2017	2018	2019
Nombre d'enfants diabétiques (en milliers)	18,3	19	20

Partie A

1. Déterminer le taux d'évolution entre 2017 et 2018, puis entre 2018 et 2019.
2. Calculer la moyenne géométrique de $1,038$ et $1,053$.
3. Déduire le taux moyen annuel d'évolution entre 2017 et 2019.

Partie B Des études récentes permet de supposer que le nombre d'enfants diabétiques augmente de $4,5\%$ par an à partir de 2019 en France. On modélise cette évolution par une suite (u_n), en notant u_n le nombre d'enfants diabétiques en France (en milliers d'individus) pour l'année 2019+n. Ainsi, $u_0 = 20$.

1. (a) Calculer u_1.
   (b) Donner la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
   (d) Calculer le nombre d'enfants atteints de diabète de type 1 en France en 2025.
2. (a) Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il affiche la première valeur de n à partir de laquelle $u_n \geqslant A$.
   (b) Déterminer `suite(25)`. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

```
def suite(A):
    n = ...
    u = ...
    while ....... :
        n = .....
        u = .....
    return n
```