Suites géométriques

I Moyenne géométrique de deux nombres

Définition I.1

La **moyenne géométrique** de deux nombres a et b positifs est $\sqrt{a \times b}$.

Exemple I.1 — 1. Déterminer la moyenne géométrique des nombres 4 et 9.

2. La moyenne géométrique de deux nombres est de 12. Sachant qu'un des deux nombres est 24, quel est l'autre nombre
$\rightarrow$ À rédiger

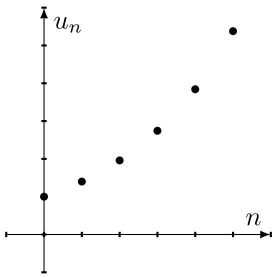
II Expressions d'une suite géométrique

1. Définition d'une suite géométrique

Définition II.1

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** lorsque chaque terme est obtenu à partir du précédent en multipliant par un même nombre q qu'on appelle la **raison**.

Autrement dit, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.



Remarque — Les points représentant une suite géométrique suivent ce qu'on appelle une **croissance exponentielle**.

Exemple II.1 — Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1,5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Représenter les quatre premiers termes de cette suite dans un repère. $\rightarrow$ À rédiger

Exemple II.2 — On donne le programme suivant écrit en langage Python.

1. Que contiendra la variable u à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
2. Donner une suite géométrique dont ce programme permet de calculer les termes. $\rightarrow$ À rédiger

Python
```python
u = 4
for k in range(1,3):
    u = u * 6
```

2. Lien avec la moyenne géométrique

Proposition II.2

Trois nombres $a < b < c$ sont les termes d'une suite géométrique si, et seulement si, le nombre du milieu est la moyenne géométrique des nombres extrêmes.

Exemple II.3 — Dans chaque cas, dire si a, b et c sont les termes d'une suite géométrique ou non.

1. $a = 2$, $b = 8$ et $c = 32$.
2. $a = 4$, $b = 6$ et $c = 10$. $\rightarrow$ À rédiger

Exemple II.4 — (u_n) est une suite géométrique telle que $u_0 = 8$, $u_2 = 18$ et $u_4 = 40,5$.

1. Calculer u_1 et u_3.
2. Donner la raison q de cette suite géométrique. $\rightarrow$ À rédiger

3. Expression du terme général d'une suite géométrique

Proposition II.3

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque — Si la suite commence à $n = 1$ alors $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Exemple II.5 — Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. En déduire les valeurs de u_7 et u_{11}. → À rédiger

III Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition III.1

La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est

$$S = \text{1er terme} \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Exemple III.1 — Calculer la somme des quatre premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$. → À rédiger

Exemple III.2 — La légende raconte que pour récompenser l'inventeur du jeu d'échec, le roi lui demanda ce qu'il souhaitait. L'inventeur lui demanda de poser un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre grains sur la troisième case, etc. en doublant à chaque fois. Pourquoi cette demande a-t-elle provoqué la ruine du royaume ? → À rédiger

Définition III.2

La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ des n premiers termes d'une suite géométrique s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Exemple III.3 — (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Dans chaque cas, calculer la somme.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} u_k$ avec $u_0 = 3$ et $q = 4$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k$ avec $u_0 = 10$ et $q = 0,5$ (donner une valeur approchée à l'unité) → À rédiger

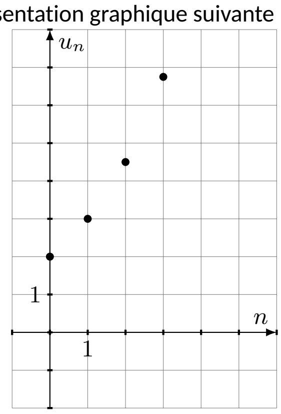
Solutions

Exemple I.1

1. $\sqrt{4\times 9}=\sqrt{36}=6$
2. Soit b l'autre nombre. Comme $\sqrt{24\times b}=12$ alors $24\times b=12^2$ donc $24\times b=144$. Ainsi, $b=\dfrac{144}{24}=6$.

Exemple II.1

1. $u_1=u_0\times 1,5=2\times 1,5=3$.
   $u_2=u_1\times 1,5=3\times 1,5=3$.
   $u_3=u_2\times 1,5=4,5\times 1,5=6,75$.
2. $u_{n+1}=1,5\times u_n$
3. On a la représentation graphique suivante :



Exemple II.2

1. La variable u contiendra la valeur 144.
2. La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=4$ et de raison $q=6$.

Exemple II.3

1. $\sqrt{a\times c}=\sqrt{2\times 32}=\sqrt{64}=8=b$
   Ce sont bien les termes d'une suite géométriques.
2. $\sqrt{a\times c}=\sqrt{4\times 10}=\sqrt{40}\neq 6$
   Ce ne sont pas les termes d'une suite géométrique.

Exemple II.4

1. $u_1=\sqrt{u_0\times u_2}=\sqrt{8\times 18}=\sqrt{144}=12$
   $u_3=\sqrt{u_2\times u_4}=\sqrt{18\times 40,5}=\sqrt{729}=27$
2. Comme $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{12}{8}=1,5$, la raison de cette suite est donc $q=1,5$.

Exemple II.5

1. $u_1=u_0\times 3=2\times 3=6$
   $u_2=u_1\times 3=6\times 3=18$
   $u_3=u_2\times 3=18\times 3=54$
2. $u_n=u_0\times q^n=2\times 3^n$
3. $u_7=2\times 3^7=4374$
   $u_{11}=2\times 3^{11}=354294$

Exemple III.1

Les quatre premiers termes sont u_0, u_1, u_2 et u_3.

$u_0+u_1+u_2+u_3=u_0\times\dfrac{3^4-1}{3-1}=5\times\dfrac{80}{2}=200$

Exemple III.2

Le nombre de grains de riz est $S=1+2+2^2+\cdots+2^{63}$. C'est la somme des 64 premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0=1$.

Ainsi, $S=1\times\dfrac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1\approx 1,84\times 10^{19}$.

Exemple III.3

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}u_k=3\times\frac{4^4-1}{4-1}=3\times\frac{255}{3}=255$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}u_k=10\times\frac{0,5^{11}-1}{0,5-1}\approx 20$

Suites géométriques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite géométrique
- Déterminer la raison d'une suite géométrique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Suites géométriques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite géométrique
- Déterminer la raison d'une suite géométrique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Suites géométriques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite géométrique
- Déterminer la raison d'une suite géométrique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique