CHAPITRE 2

Probabilités conditionnelles

I Conditionnement

1. Probabilités conditionnelles

Définition I.1

Soit A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. La probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé s'appelle la **probabilité conditionnelle** de B sachant A.

On la note $P_A(B)$ et on a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemple I.1 — Une urne contient six boules vertes numérotées $1, 1, 1, 1, 2$ et 2 ainsi que quatre boules rouges numérotées $1, 1, 2$ et 2.
On note A l'événement « La boule tirée est rouge » et B l'événement « La boule tirée a pour numéro 1 ».

1. Déterminer $P(A)$ et $P(A \cap B)$.
2. On tire une boule et constate qu'elle est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle porte le numéro 1 ? → À rédiger

Proposition I.2

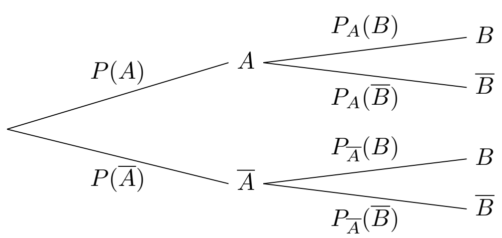
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Exemple I.2 — Dans une classe, 70% des élèves ont un bracelet connecté. Parmi ces élèves qui possèdent un bracelet, 25% ont en plus un casque bluetooth. On choisit un élève au hasard dans la classe et on note A l'événement « L'élève possède un bracelet connecté » et B l'événement « L'élève possède un casque bluetooth ».

1. Donner $P(A)$ et $P_A(B)$.
2. Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard dans cette classe possède à la fois un bracelet connecté et un casque bluetooth ? → À rédiger

2. Arbres de probabilités

Pour représenter une expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre sur lequel apparaîtront des probabilités conditionnelles :



Exemple I.3 — Un panier contient 45% de citrons et le reste de kiwis. Parmi les citrons, 70% viennent de France. Parmi les kiwis, 80% ne proviennent pas de France. On considère les événements A : « Le fruit est un citron » et B : « Le fruit provient de France ». Faire un arbre de probabilités représentant la situation. → À rédiger

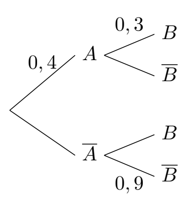
Proposition I.3

Dans un arbre de probabilités :

- La probabilité d'un chemin est la probabilité de l'intersection des événements qui composent ce chemin.
- La somme de toutes les probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

Exemple I.4 — On donne l'arbre de probabilités ci-contre.

1. Compléter l'arbre suivant.
2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$. → À rédiger



II Formule des probabilités totales

Théorème II.1

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement dans un arbre pondéré. Autrement dit,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Démonstration. → À rédiger

Exemple II.1 — Dans un troupeau de bovins, 2% des bêtes sont porteuses d'une maladie. On a mis un test au point pour détecter la maladie :

- Si un animal est malade, le test a 85% de chances d'être positif ;
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit une bête au hasard dans ce troupeau et on lui fait le test. On note :

- A : « La bête choisie est malade »
- B : « Le test est positif »

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Tracer en rouge le chemin correspondant à l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.
3. Tracer en vert le chemin correspondant à l'événement $\overline{A} \cap B$ puis calculer sa probabilité.
4. Avec la formule des probabilités totales, calculer la probabilité que le test soit positif. → À rédiger

III Indépendance

Définition III.1

On dit que B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$.

Remarque — Cela veut dire que l'événement A n'a pas d'influence sur l'événement B.

Exemple III.1 — On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements A : « La carté tirée est un trêfle » et B : « La carte tirée est une dame ».

1. Calculer $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P(B)$.
2. L'événement B est-il indépendant de l'événement A ? → À rédiger

Proposition III.2

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
B est indépendant de A si, et seulement si, A est indépendant de B si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple III.2 — Sur son trajet pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. La probabilité pour que le premier feu soit vert lorsqu'il arrive à sa hauteur est $0,6$ et la probabilité pour que le deuxième feu soit vert est $0,55$. On note A l'événement « Le premier feu est vert » et B l'événement « Le deuxième feu est vert ». On fait l'hypothèse que ces deux événements sont indépendants. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter à l'un des deux feux ? → À rédiger

Solutions

Exemple I.1

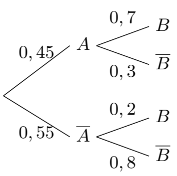
1. $P(A) = \dfrac{4}{10}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{2}{10}$
2. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}) = \dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}}$

   donc $P_A(B) = \dfrac{2}{10} \times \dfrac{10}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

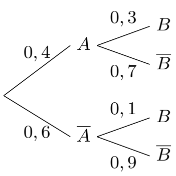
Exemple I.2

1. $P(A) = 70\% = 0,7$ et $P_A(B) = 25\% = 0,25$.
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,7 \times 0,25 = 0,175$.

Exemple I.3



Exemple I.4

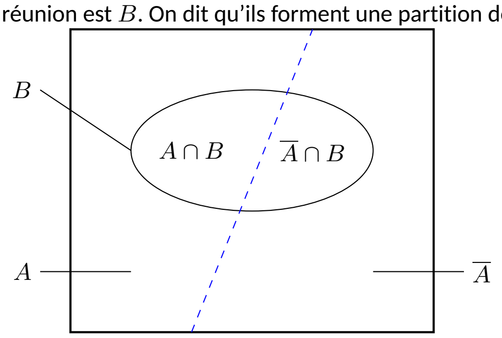


1.
2. $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

   $P(\overline{A} \cap B) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$

Théorème II.1

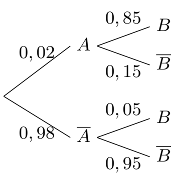
Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. De plus, leur réunion est B. On dit qu'ils forment une partition de B.



On en déduit donc que $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

Exemple II.1

1. On a l'arbre suivant :



2. $P(A \cap B) = 0,02 \times 0,85 = 0,017$
3. $P(\overline{A} \cap B) = 0,98 \times 0,05 = 0,049$
4. D'après la formule des probabilités totales,

   $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,017 + 0,049 = 0,066$

Exemple III.1

1. $P(A) = \dfrac{13}{52}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \dfrac{1}{13}$ et $P(B) = \dfrac{4}{52}$.
2. Comme $\dfrac{4}{52} = \dfrac{4}{4 \times 13} = \dfrac{1}{13}$, on a donc $P_A(B) = P(B)$ donc l'événement B est indépendant de l'événement A.

Proposition III.2

B est indépendant de $A \iff P_A(B) = P(B) \iff \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
De même, A est indépendant de $B \iff P_B(A) = P(A) \iff \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple III.2

Comme les événements sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,55 = 0,33$. Il a donc 33% de chances de faire son trajet sans s'arrêter à l'un des deux feux.

Probabilités conditionnelles

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Probabilités conditionnelles

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Probabilités conditionnelles

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.