Suites arithmétiques

I Moyenne arithmétique de deux nombres

Définition I.1

La **moyenne arithmétique** de deux nombres a et b est $\dfrac{a+b}{2}$.

Exemple I.1 — 1. Déterminer la moyenne arithmétique des nombres 12 et 18.

2. Un élève a eu deux notes ce trimestre. Il se souvient que sa première note était de 8 et a oublié sa deuxième note. La moyenne à ces deux contrôles est de 10. Retrouver sa deuxième note. → À rédiger

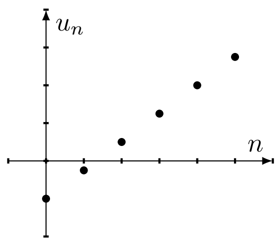
II Expressions d'une suite arithmétique

1. Définition d'une suite arithmétique

Définition II.1

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** lorsque chaque terme est obtenu à partir du précédent en ajoutant un même nombre r qu'on appelle la **raison**.

Autrement dit, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.



Remarque — Les points représentant une suite arithmétique sont situés sur une droite : on parle de **croissance linéaire**.

Exemple II.1 — Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $r = 2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Représenter cette suite dans un repère. → À rédiger

Exemple II.2 — On donne le programme suivant écrit en langage Python.

1. Que contiendra la variable u à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
2. Donner une suite arithmétique dont ce programme permet de calculer les termes. → À rédiger

Python
```
u = 5
for k in range(1,3):
    u = u - 4
```

2. Lien avec la moyenne arithmétique

Proposition II.2

Trois nombres $a < b < c$ sont les termes d'une suite arithmétique si, et seulement si, le nombre du milieu est la moyenne arithmétique des nombres extrêmes.

Exemple II.3 — Dans chaque cas, dire si a, b et c sont les termes d'une suite arithmétique ou non.

1. $a = 2$, $b = 5$ et $c = 8$.
2. $a = -4$, $b = -1$ et $c = 3$. → À rédiger

Exemple II.4 — (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 3$, $u_2 = 11$ et $u_4 = 19$.

1. Calculer u_1 et u_3.
2. Donner la raison r de cette suite arithmétique. → À rédiger

3. Expression du terme général d'une suite arithmétique

Proposition II.3

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Remarque — Si la suite commence à $n = 1$ alors $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

Exemple II.5 — Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. En déduire les valeurs de u_{20} et de u_{50}.

$\longrightarrow$ À rédiger

III Somme des termes d'une suite arithmétique

Proposition III.1

La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est

$$S = n \times (\text{moyenne du 1er et du dernier terme})$$

Exemple III.1 — Calculer la somme des cinq premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

$\longrightarrow$ À rédiger

Exemple III.2 — Carl Friedrich Gauss est un des plus grands mathématiciens de l'histoire. La légende raconte que, lorsqu'il était écolier, son maître demanda à la classe de calculer la somme de tous les entiers de 1 à 100 afin de les occuper un moment. Gauss donna la réponse presqu'immédiatement, à la surprise de son maître.
Quel nombre Gauss a-t-il trouvé ?

$\longrightarrow$ À rédiger

Définition III.2

La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ des n premiers termes d'une suite arithmétique s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Exemple III.3 — (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Dans chaque cas, calculer la somme.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} u_k$ avec $u_0 = 3$ et $r = 4$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k$ avec $u_0 = 19$ et $r = 5$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{13} u_k$ avec $u_0 = 6$ et $r = -3$

$\longrightarrow$ À rédiger

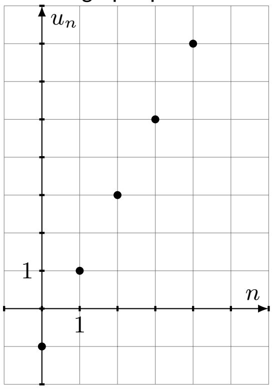
Solutions

Exemple I.1

1. $\dfrac{12+18}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$
2. Soit b sa deuxième note. Alors $\dfrac{8+b}{2} = 10$ donc $8+b = 20$ (produit en croix) donc $b = 20-8 = 12$.

Exemple II.1

1. $u_1 = u_0 + 2 = -1 + 2 = 1$
   $u_2 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$
   $u_3 = u_2 + 2 = 3 + 2 = 5$
   $u_4 = u_3 + 2 = 5 + 2 = 7$
2. $u_{n+1} = u_n + 2$
3. On a la représentation graphique suivante :



Exemple II.2

1. La variable u contiendra la valeur -3.
2. La suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -4$.

Exemple II.3

1. $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 = b$
   Ce sont bien les termes d'une suite arithmétique.
2. $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{-4+3}{2} = \dfrac{-1}{2} = -0,5 \neq b$
   Ce ne sont pas les termes d'une suite arithmétique.

Exemple II.4

1. $u_1 = \dfrac{u_0+u_2}{2} = \dfrac{3+11}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$
   $u_1 = \dfrac{u_2+u_4}{2} = \dfrac{11+19}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$
2. La raison de la suite est $u_1 - u_0 = 7 - 3 = 4$. On aurait aussi très bien pu utiliser $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$ ou encore $u_4 - u_3$.

Exemple II.5

1. $u_1 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
   $u_2 = u_1 + 2 = 5 + 3 = 8$
   $u_3 = u_2 + 2 = 8 + 3 = 11$
2. $u_n = u_0 + n \times r = 2 + 3n$
3. $u_{20} = 2 + 3 \times 20 = 2 + 60 = 62$
   $u_{50} = 2 + 3 \times 50 = 2 + 150 = 152$

Exemple III.1

Les cinq premiers termes sont u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
$u_0 = 2$ et $u_4 = u_0 + 4 \times r = 2 + 4 \times 3 = 14$
$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4 = 5\times\dfrac{2+14}{2} = 5\times\dfrac{16}{2} = 5\times 8 = 40$

Exemple III.2

La somme $S = 1+2+3+\cdots+100$ est la somme des 100 premiers termes de la suite arithmétiques de raison $r=1$ et de premier terme $u_0 = 1$.
Ainsi, $S = 100 \times \dfrac{1+100}{2} = 100 \times \dfrac{101}{2} = 5050$.

Exemple III.3

1. $u_4 = u_0 + 4 \times r = 3 + 4 \times 4 = 17$
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} u_k = 5 \times \frac{3+17}{2} = 5 \times \frac{20}{2} = 50$
2. $u_{10} = u_0 + 10 \times r = 19 + 10 \times 5 = 69$
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k = 11 \times \frac{19+69}{2} = 11 \times \frac{88}{2} = 484$
3. $u_{13} = u_0 + 13 \times r = 6 + 13 \times (-3) = -33$
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{13} u_k = 14 \times \frac{6+(-33)}{2} = 14 \times \frac{-27}{2} = -189$

Suites arithmétiques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Suites arithmétiques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Suites arithmétiques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique