Exercice 1 — Géométrie dans l'espace — Centres Étrangers 11 mai 2022

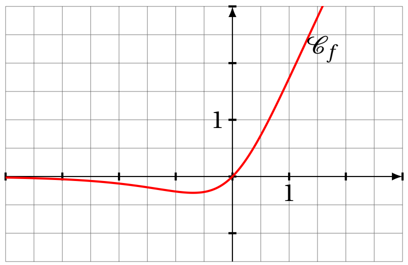
Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\mathrm{A}(2\ ;\ 0\ ;\ 3),\ \mathrm{B}(0\ ;\ 2\ ;\ 1), \mathrm{C}(-1\ ;\ -1\ ;\ 2) \text{ et } \mathrm{D}(3\ ;\ -3\ ;\ -1).$$

1. **Calcul d'un angle**
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Calculer les longueurs AB et AC.
   (c) À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ au dixième de degré.
2. **Calcul d'une aire**
   (a) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   (c) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$
   (d) Calculer l'aire du triangle ABC.
3. **Calcul d'un volume**
   (a) Soit le point F(1 ; −1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
   (b) Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
   (c) Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 2 — Fonctions exponentielle et logarithme — Asie 24 mars 2023

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\ ;\ +\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.
   Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Exercice 3 — Probabilités — Asie 18 mai 2022

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0,6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros. Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé. On appelle :

   Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

   C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

   (b) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

   (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau. Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

   (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Exercice 4 — Suites — La Réunion 29 mars 2023

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5}$.

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{6x+2}{x+5}$.

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}$.

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

   (c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n). En déduire la limite de (u_n).
5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

   Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 5 — Géométrie dans l'espace — Amérique du Nord 27 mars 2023

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points A$(-1\,;\,2\,;\,5)$, B$(3\,;\,6\,;\,3)$, C$(3\,;\,0\,;\,9)$ et D$(8\,;\,-3\,;\,-8)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. ABC est un triangle :

   a. isocèle rectangle en A **b.** isocèle rectangle en B

   c. isocèle rectangle en C **d.** équilatéral

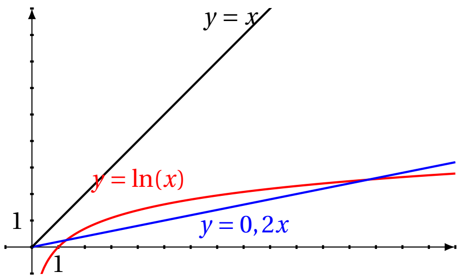
2. Une équation cartésienne du plan (BCD) est :
   a. $2x + y + z - 15 = 0$ **b.** $9x - 5y + 3 = 0$
   c. $4x + y + z - 21 = 0$ **d.** $11x + 5z - 73 = 0$
3. On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$.
   On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   On peut affirmer que :
   a. H$(-2\,;\,17\,;\,12)$ **b.** H$(3\,;\,7\,;\,2)$
   c. H$(3\,;\,2\,;\,7)$ **d.** H$(-15\,;\,1\,;\,-1)$
4. Soit la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, avec t réel.
   Les droites (BC) et Δ sont :
   a. confondues **b.** strictement parallèles
   c. sécantes **d.** non coplanaires
5. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 2z - 6 = 0$.
   On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$.
   On peut affirmer que :
   a. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont strictement parallèles
   b. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AB)
   c. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AC)
   d. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (BC)

Exercice 6 — Fonction logarithme — Asie 23 mars 2023

Soit k un réel strictement positif.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ de paramètre k.

1. **Conjectures graphiques :**

   On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0,2x$.



   À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0,2$.

2. Étude du cas $k = 1$. On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, par : $f(x) = \ln(x) - x$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.
   Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.
3. Étude du cas général : k est un nombre réel strictement positif.
   On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) - kx$.
   On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
g	||		$g\left(\frac{1}{k}\right)$		
	|| $-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

   (a) Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.
   (b) Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.
   (c) Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.
   (d) Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.
   (e) Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.

Exercice 7 — Probabilités — Métropole 8 septembre 2022

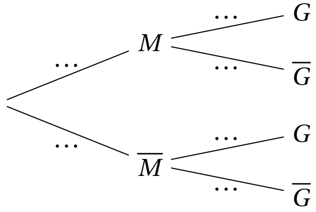
Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

Une étude a montré que 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte.
Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'hôtel ne font aucune visite.
On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée » ;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire de M, $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E.
Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06$.

1. (a) Vérifier que $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$, où $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.
   (b) L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



   (c) Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?
   (d) Montrer que $p(G) = 0,66$.
2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?
3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :
   - visite du musée : 12 euros ;
   - visite de la grotte : 5 euros.

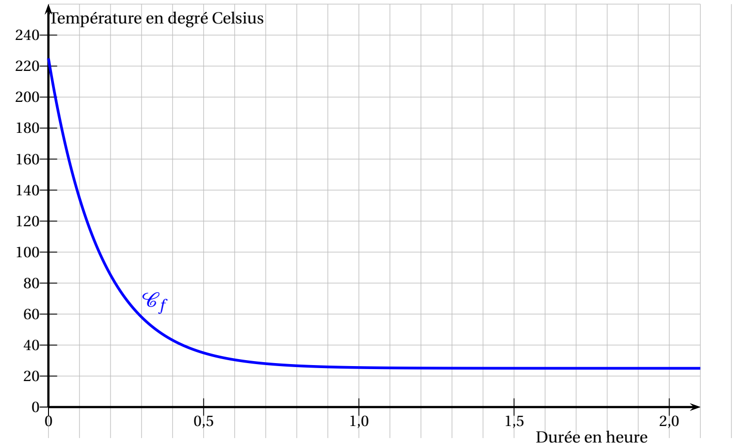
   On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.
   (a) Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de T.
   (c) Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour.
   Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.
4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros.
   Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).
5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.
   Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel ?
   On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

Exercice 8 — Équations différentielles — Sujet zéro 2021

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C. On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four. On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four. Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C. On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   (c) En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   — décroît ;
   — tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\,;\,+\infty[$.
   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon. On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire $\mathcal{T}_0$. On donnera une valeur approchée de $\mathcal{T}_0$ sous forme d'un nombre entier de minutes.
5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four. Ainsi, pour un entier naturel n, $\mathcal{D}_n$ désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four. On admet que, pour tout entier naturel n : $\mathcal{D}_n = f\left(\dfrac{n}{60}\right) - f\left(\dfrac{n+1}{60}\right)$.
   (a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de $\mathcal{D}_0$ à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n, $\mathcal{D}_n = 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right)$.
   En déduire le sens de variation de la suite $(\mathcal{D}_n)$, puis la limite de la suite $(\mathcal{D}_n)$.
   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?