Exercice 1 — Géométrie dans l'espace — Centres Étrangers 11 mai 2022

1. **Calcul d'un angle**

   (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; or ces coordonnées ne sont pas proportionnelles $\dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-2}{-1}$, donc il n'existe pas de réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (b) • $AB^2 = 4+4+4 = 3\times 4$, donc $AB = 2\sqrt{3}$:
   • $AC^2 = 9+1+1 = 11$, donc $AC = \sqrt{11}$.

   (c) • D'une part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6-2+2 = 6$;
   • D'autre part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

   On a donc $6 = 2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\widehat{BAC} \iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{33}} \iff \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{33}}\right)$.

   La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 58,51$, soit $58,5°$ au dixième près.

2. **Calcul d'une aire**

   (a) Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de $\mathscr{P}$. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

   Avec $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$, on obtient :

   $-2(x+1)+2(y+1)-2(z-2) = 0 \iff -(x+1)+(y+1)-(z-2) = 0 \iff -x+y-z+2 = 0.$

   (b) En prenant le vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur de la droite (AB), soit $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ on a :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-2 &=& t\times(-1)\\ y-0 &=& t\times 1\\ z-3 &=& t\times(-1)\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff$

   $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& 3-t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$

   (c) E projeté orthogonal de C sur (AB) appartient au plan $\mathscr{P}$ et à la droite (AB) ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de $\mathscr{P}$ et les équations paramétriques de (AB), donc le système :

   $\left\{\begin{array}{lcl} -x+y-z+2 &=& 0\\ x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& 3-t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$; en remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathscr{P}$ on obtient :

   $-2+t+t-3+t+2 = 0 \iff 3t-3 = 0 \iff t = 1.$

   On a donc E(1 ; 1 ; 2).

   (d) On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$, d'où $BC^2 = 1+9+1 = 11$ et $BC = \sqrt{11}$.

   Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C ; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

   On a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $CE^2 = 1+4 = 8$ et $CE = 2\sqrt{2}$.

   L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

   $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{AB\times CE}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$

3. **Calcul d'un volume**

   (a) $F \in (ABC) \iff$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, tels que : $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \iff$

   $\left\{\begin{array}{lcl} -1 &=& -2\alpha-3\beta\\ -1 &=& 2\alpha-\beta\\ 0 &=& -2\alpha-\beta\end{array}\right.$. En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on obtient $-1 = -2\beta \iff \beta = \dfrac{1}{2}$ et en remplaçant β par $\dfrac{1}{2}$ dans la première équation $-1 = -2\alpha+\dfrac{3}{2} \iff 2\alpha = 1-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \iff \alpha = -\dfrac{1}{4}$.

   Donc $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

   (b) Avec $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$, on peut calculer :

   $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AB} = -2-2+4 = 0$ et
   $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC} = -6+2+4 = 0.$

   Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

   (c) Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :

   $\mathscr{V}(ABCD) = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(ABC)\times FD$

   Avec $FD^2 = 4+4+16 = 24$, on trouve $FD = \sqrt{24} = \sqrt{4\times 6} = 2\sqrt{6}$, d'où :

   $\mathscr{V}(ABCD) = \dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6} = \dfrac{4\times 6}{3} = 8.$

Exercice 2 — Fonctions exponentielle et logarithme — Asie 24 mars 2023

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = X = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$; d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
2. On peut écrire $g(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on a par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et enfin par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
3. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et
$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 1\right)$.
4. D'après la question précédente comme $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui de $2\mathrm{e}^x - 1$.
   - $2\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff 2\mathrm{e}^x = 1 \iff \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{2} \iff x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ;
   - $2\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff 2\mathrm{e}^x > 1 \iff \mathrm{e}^x > \dfrac{1}{2} \iff x > \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$;
   - $2\mathrm{e}^x - 1 < 0 \iff 2\mathrm{e}^x < 1 \iff \mathrm{e}^x < \dfrac{1}{2} \iff x < \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

   La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$ et croissante sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$.
   Donc $g(-\ln 2) = \mathrm{e}^{-2\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2} + 11 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le minimum de la fonction g est supérieur à zéro, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad g(x) > 0$.
6. En posant $X = \mathrm{e}^x$, $g(x) = g(X) = X^2 - X + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
Sous cette écriture on voit que $g(X)$ est un trinôme somme de deux carrés dont l'un est supérieur à zéro, donc $g(X) > 0$.

Partie B

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \ln g(x)$.
Or on a vu dans la partie précédente que $g(x) > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \ln g(x)$ entraîne
$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1}$.
3. Soit $\mathscr{T}_0$ la tangente au point d'abscisse 0 :
On a $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T}_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
   - $f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln 1 = 0$;
   - $f'(0) = \dfrac{2-1}{1-1+1} = 1$, donc :

   $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T}_0 \iff y - 0 = 1(x - 0) \iff y = x$.
4. On a vu que $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ et dans la partie que le dénominateur $g(x) > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g'(x)$ étudié dans la partie A.
Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$, d'où la fonction f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, d'où la fonction f est croissante sur cet intervalle.
5.
   - $f(-\ln 2) = \ln g(-\ln 2) = \ln\dfrac{3}{4} \approx -0{,}29$;
   - On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln g(x) = +\infty$.

   La fonction f est continue car dérivable sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, strictement croissante de $f(-\ln 2) < 2$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in]-\ln 2\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne :
   $f(1) \approx 1{,}7$ et $f(2) \approx 3{,}8$, donc $1 < \alpha < 2$;
   $f(1{,}1) \approx 1{,}9$ et $f(1{,}2) \approx 2{,}2$, donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$;
   $f(1{,}12) \approx 1{,}99$ et $f(1{,}13) \approx 2{,}01$, donc $1{,}12 < \alpha < 1{,}13$.

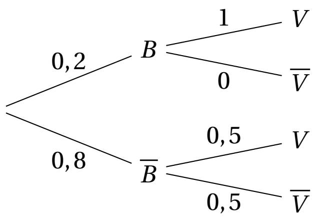
Partie C

Conjecture 1 : d'après le résultat précédent elle est vraie ;
Conjecture 2 : elle est fausse f est croissante sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$;
Conjecture 3 : on a vu que l'équation de cette tangente est $y = x$: la conjecture est fausse.

Exercice 3 — Probabilités — Asie 18 mai 2022

Partie 1

1. S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc $P_B(V) = 1$.
2. On représente la situation par un arbre pondéré.



3. D'après la loi des probabilités totales :
$P(V) = P(B \cap V) + P\left(\overline{B} \cap V\right) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$
4. On calcule $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{P(B \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$.

Partie 2

1. La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.
2. On a $E(X) = n \times p = 206 \times 0,95 = 196,3 \approx 196$. En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.
3. On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5 \approx 0,03063$, soit 0,031 au millième près.
4. La calculatrice donne $P(X \leqslant 200) \approx 0,9477$, soit 0,948 au millième près.
Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli.
5. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	0,00003
c_i	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400

(a) En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve :
$P(Y = 6) = 1 - \big(P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = 5)\big) = 0,00003.$

(b) La compagnie a encaissé $206 \times 250 = 51500$€ et elle devra rembourser 850€ à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C = 51500 - 850Y$

(c) Voir le tableau ci-dessus.
On a $\mathrm{E}(C) = 51500 \times 0,94775 + \ldots 46400 \times 0,00003 \approx 51429,2$, soit 51429€ à l'euro près

(d) En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de 200×250 soit 50000 euros.
En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51429 euros.

Exercice 4 — Suites — La Réunion 29 mars 2023

1. Pour $n = 0$, on a $u_1 = \dfrac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \dfrac{50}{13}$.
2.
$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

(a) Le dénominateur étant supérieur à 4 ne s'annule pas : la fonction f est donc dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{6(x+5) - 1(6x+2)}{(x+5)^2} = \dfrac{6x + 30 - 6x - 2}{(x+5)^2} = \dfrac{28}{(x+5)^2}$:quotient de deux nombres supérieurs à zéro cette dérivée est supérieure à zéro : la fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et son minimum est $f(0) = \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$.
On a $f(2) = \dfrac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \dfrac{14}{7} = 2$.
Or comme f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: $x > 2 \implies f(x) > f(2) = 2$ d'après le calcul précédent.

(b) *Initialisation* : $u_0 = 8 > 2$: la relation est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2$.
Alors par croissance de la fonction f : $f(u_n) > f(2) = 2$.
Or $f(u_n) = u_{n+1}$: on a donc $u_{n+1} > 2$.
Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n + 1$. Par le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

(a) On a $u_n > 2 \implies u_n + 1 > 2 + 1 > 0$ et $u_n > 2 \implies u_n + 5 > 2 + 5 > 0$.
Le signe du quotient précédent est donc celui de $2 - u_n$; or $u_n > 2 \implies$
$0 > 2 - u_n$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

(b) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 2 est donc convergente vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 2$.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :
$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

(a) $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{8 - 2}{8 + 1} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

(b) On sait que $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5}$

Or $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1}$ et en utilisant la relation précédente :

$$v_{n+1} = \dfrac{\frac{6u_n+2}{u_n+5}-2}{\frac{6u_n+2}{u_n+5}+1} = \dfrac{\frac{6u_n+2}{u_n+5}-\frac{2u_n+10}{u_n+5}}{\frac{6u_n+2}{u_n+5}+\frac{u_n+5}{u_n+5}} = \dfrac{4u_n-8}{7u_n+7} = \dfrac{4(u_n-2)}{7(u_n+1)} = \dfrac{4}{7}v_n.$$

La relation $v_{n+1} = \dfrac{4}{7}v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

(c) • On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$ ou encore $v_n = \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$.

Or comme $-1 < \dfrac{4}{7} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$ et par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$ et comme $u_n+1 > 2+1 > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 2 = 0$, soit enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. Donc $\ell = 2$.

(d) On vérifie à la calculatrice que $u_{14} \approx 2{,}000\,79$ est le premier terme inférieur à 2,001. Valeur renvoyée : 14.

Exercice 5 — Géométrie dans l'espace — Amérique du Nord 27 mars 2023

1. **Réponse A.**

   Ici, les quatre propositions peuvent se vérifier avec les longueurs des côtés du triangle ABC. On va donc les déterminer. Comme le repère est orthonormé, on a :

   $\text{AB} = \sqrt{(x_\text{B}-x_\text{A})^2+(y_\text{B}-y_\text{A})^2+(z_\text{B}-z_\text{A})^2} = \sqrt{(3+1)^2+(6-2)^2+(3-5)^2} = \sqrt{36} = 6$

   $\text{BC} = \sqrt{(x_\text{C}-x_\text{B})^2+(y_\text{C}-y_\text{B})^2+(z_\text{C}-z_\text{B})^2} = \sqrt{(3-3)^2+(0-6)^2+(9-3)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

   $\text{AC} = \sqrt{(x_\text{C}-x_\text{A})^2+(y_\text{C}-y_\text{A})^2+(z_\text{C}-z_\text{A})^2} = \sqrt{(3+1)^2+(0-2)^2+(9-5)^2} = \sqrt{36} = 6$

   ABC est donc clairement un triangle isocèle en A, (et on peut vérifier rapidement que le carré du côté opposé à A est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, et donc que le triangle est aussi rectangle en A).

   Remarque : si on a confiance en ses calculs, une fois qu'on a calculé AB et BC, on peut s'arrêter : on voit clairement que le triangle ne sera pas équilatéral, et donc il sera rectangle et isocèle, car c'est un point commun aux trois autres propositions et le côté [BC] étant plus long que AB, cela signifie que [BC] est l'hypoténuse, et donc que le sommet principal du triangle est A.

2. **Réponse C.**

   Ici, il faut s'armer de patience et vérifier si les coordonnées des points B, C et D vérifient les équations proposées. (On peut aussi chercher à trouver une équation du plan, mais c'est plutôt plus compliqué).

   Pour la proposition **a.**, les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation : elle est incorrecte.

   Pour la proposition **b.**, les coordonnées de C et de D ne vérifient pas l'équation.

   Pour la proposition **d.**, aucunes des coordonnées des points B, C et D ne vérifient pas l'équation.

   Par contre, pour l'équation de la proposition **c.**, on a :

   $4x_\text{B}+y_\text{B}+z_\text{B}-21 = 4\times3+6+3-21 = 12+9-21 = 0$ donc B appartient à ce plan.

   $4x_\text{C}+y_\text{C}+z_\text{C}-21 = 4\times3+0+9-21 = 12+9-21 = 0$ donc C appartient à ce plan.

   $4x_\text{D}+y_\text{D}+z_\text{D}-21 = 4\times8-3-8-21 = 32-11-21 = 0$ donc D appartient à ce plan.

   Ainsi, l'équation de la proposition **c.** décrit un plan qui contient les points B, C et D : c'est le plan (BCD).

3. **Réponse B.**

   Ici, on peut procéder par tests successifs : vérifier parmi les coordonnées proposées quelles sont celles qui vérifient l'équation du plan (ABC) puis pour celles qui vérifient l'équation du plan (c'est-à-dire quand le point donné est bien sur le plan) si le vecteur $\overrightarrow{\text{DH}}$ obtenu est bien un vecteur normal au plan.

   Dans ce corrigé, on va appliquer la démarche qui sert à trouver les coordonnées de H.

   Comme le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-2y-2z+15=0$, cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC), H est l'intersection du plan (ABC) avec la droite d, passant par D et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

   Du coup, la droite d admet une représentation paramétrique qui est : $\begin{cases} x = 8+k \\ y = -3-2k \\ z = -8-2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

   Si on appelle M_k le point de paramètre k sur la droite d, on va chercher pour quel paramètre M_k est sur le plan (ABC) :

   $$\begin{aligned} M_k \in (\text{ABC}) &\iff (8+k)-2(-3-2k)-2--8-2k)+15=0 \\ &\iff 8+k+6+4k+16+4k+15=0 \\ &\iff 9k+45=0 \\ &\iff k=-5 \end{aligned}$$

   H est donc le point M_{-5} qui a comme coordonnées : $(8+(-5)\ ;\ -3-2\times(-5)\ ;\ -8-2\times(-5))$, soit $(3\ ;\ 7\ ;\ 2)$.

4. **Réponse D.**

   La représentation paramétrique de Δ donne un vecteur directeur de Δ qui est $\overrightarrow{v}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ alors que le vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc on peut affirmer que les droites se sont ni confondues ni strictement parallèles.

   Il faut donc déterminer si elles ont un point commun pour trancher entre sécantes et non coplanaires.

   La droite (BC) passe par B et est dirigée notamment par $\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\text{BC}}$, elle admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6-s \\ z = 3+s \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

Le point de paramètre t sur Δ est confondu avec celui de paramètre s sur (BC) si et seulement si s et t sont les solutions du système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3 = 5 + t \\ 6 - s = 3 - t \\ 3 + s = -1 + 3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ 6 - s = 5 \\ 3 + s = -7 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (S) \iff \begin{cases} t = -2 \\ s = 1 \\ s = -10 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc les droites n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles : elles sont donc non coplanaires.

5. **Réponse B.**

Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 2z - 6 = 0$ admet $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

(ABC) d'équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$ admet $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. On peut même calculer le produit scalaire $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}$ pour constater qu'ils sont orthogonaux, et donc que les plans sont perpendiculaires. Cela élimine la proposition **a.**

Reste à trancher entre les trois autres propositions.

On pourrait résoudre le système formé par les deux équations de plan pour trouver une représentation paramétrique de leur intersection : ce serait lourd en calcul. Ici, il est plus simple de tester l'appartenance des points A, B et C au plan $\mathscr{P}$. En remplaçant x, y et z par les coordonnées des points dans l'équation de $\mathscr{P}$, on trouve que les points A, et B appartiennent à $\mathscr{P}$, mais pas C, donc les plans sont sécants et leur intersection est la droite (AB).

Exercice 6 — Fonction logarithme — Asie 23 mars 2023

1. **Conjectures graphiques :**

Le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$:

— pour $k = 1$, l'équation ne semble pas avoir de solution, car il semble que la droite d'équation $y = x$ ne coupe pas la courbe représentative de la fonction ln ;

— pour $k = 0{,}2$, l'équation semble avoir deux solutions, car la droite d'équation $y = 0{,}2x$ semble couper la courbe représentative de la fonction ln en deux endroits distincts.

2. Étude du cas $k = 1$:

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$f'(x) = \ln'(x) - 1 = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

(b) On va donc étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations, au sein d'un tableau. Comme les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues, on ne va pas les déterminer.

Sur $\mathbb{R}^{*+}$, x est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - x$.

$1 - x > 0 \iff x < 1$. $\quad f(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
$1-x$	||	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
variations de f	||	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

(c) On en déduit que sur son ensemble de définition, f atteint un maximum égal à -1 pour $x = 1$, donc f est à valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Il n'y a donc aucune solution à l'équation $f(x) = 0$, or $f(x) = 0 \iff \ln(x) = x$, donc l'équation $\ln(x) = x$ n'admet aucune solution.

3. Étude du cas général :

(a) Discutons du nombre de solutions :

— Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) < 0$, alors la fonction g a pour maximum un nombre réel strictement négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.

— Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) = 0$, alors l'équation admet clairement $\dfrac{1}{k}$ comme solution et cette solution est la seule, car : g étant strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{k}\right]$, $x < \dfrac{1}{k} \implies g(x) < g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et donc $g(x) < 0$.

Et g étant strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$, $x > \dfrac{1}{k} \implies g(x) < g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et donc $g(x) < 0$.

Ainsi, l'équation admet une unique solution dans ce cas.

— Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$, alors :

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{k}\right]$, et 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{x \to 0} g = -\infty$ et $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Puis, de façon analogue, on applique le même théorème sur $\left]\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$, où g est continue et strictement décroissante pour faire émerger une seconde solution β, la seule sur $\left]\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$.

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans ce cas.

(b) On rappelle que k est un réel strictement positif, donc $\frac{1}{k}$ l'est aussi, et donc $\frac{1}{k}$ est dans l'ensemble de définition de g. On a $g\left(\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - k \times \frac{1}{k} = -\ln(k) - 1$.

(c) On a : $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff -\ln(k) - 1 > 0$.

$$\iff -\ln(k) > 1$$
$$\iff \ln(k) < -1$$

Nous parvenons bien à l'équivalence demandée.

(d) On remarque que $g(x) = 0 \iff \ln(x) = kx$.

L'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions est donc constitué des nombres k vérifiant $\ln(k) < -1$, d'après la question précédente.

$\ln(k) < -1 \iff k < e^{-1}$.

L'ensemble des valeurs k cherché est donc $]0\,;\, e^{-1}[$

(e) En synthèse des questions précédentes, on peut donc dire que l'équation $\ln(x) = kx$:

— admet exactement deux solutions pour $k \in]0\,;\, e^{-1}[$;

— admet une unique solution pour $k = e^{-1}$;

— n'admet aucune solution pour $k \in]e^{-1}\,;\, +\infty[$;

Remarque : Ce résultat confirme nos conjectures du début de problème, dans la mesure où $0,2 \in]0\,;\, e^{-1}[$ et $1 \in]e^{-1}\,;\, +\infty[$ (en effet $e^{-1} \approx 0,4$).

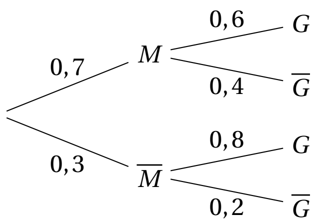
Exercice 7 — Probabilités — Métropole 8 septembre 2022

1. (a) On a $p(M) = 0,7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0,06 \iff p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$, soit

$0,06 = 0,3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0,2$.

(b)



(c) On calcule $p\left(\overline{M} \cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

(d) On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(G) = p(M \cap G) + p\left(\overline{M} \cap G\right) = 0,42 + 0,24 = 0,66$.

2. On calule $p_G(M) = \dfrac{p(G \cap M)}{p(G)} = \dfrac{p(M \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,42}{0,66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5$. L'affirmation est exacte.

3. (a) On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

(b) D'après le tableau précédent :

$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7$.

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70€.

(c) Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :

$11,7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11,7}$. Or $\dfrac{700}{11,7} \approx 59,8$.

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte ; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :

$E = 0,42(12 + g) + 12 \times 0,28 + 0,24 \times g + 0 \times 0,06 = 5,04 + 0,42g + 3,36 + 0,24g = 8,4 + 0,66g$.

Le responsable veut que :

$8,4 + 0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10$.

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.

La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(100 ; 0,66)$.

Il faut donc trouver $p(G > 75)$. La calculatrice donne $P(G \leqslant 75) \approx 0,9797$, donc $P(G > 75) \approx 1 - 0,9797$ soit environ 0,0203, donc 0,020 au millième près.

Exercice 8 — Équations différentielles — Sujet zéro 2021

1. (a) $f(0)$ représente la température d'une baguette lors de sa sortie du four, c'est-à-dire 225 °C.

   (b) Pour résoudre l'équation, on la met sous la forme $y' = ay + b$ avec a et b des réels. On obtient :

$$y' = -6y + 150 \iff y' = ay + b \text{ avec } \begin{cases} a = -6 \\ b = 150 \end{cases}$$

   On sait alors que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions de la forme :

$$f(t) = C\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a},\ C \in \mathbb{R}$$

   Les solutions de l'équation différentielle sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-6t} - \frac{150}{-6}$$
$$f(t) = C\mathrm{e}^{-6t} + 25$$

   (c) La solution de l'équation différentielle a été obtenue en question **b.** Il reste à exploiter la condition initiale $f(t = 0) = f(0) = 225$ d'après la valeur trouvée à la question **a.** La fonction qui satisfait donc le modèle de l'exercice est la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} f(0) = 225 &\iff C\mathrm{e}^{-6\times 0} + 25 = 225 \\ &\iff C + 25 = 225 \\ &\iff C = 200 \end{aligned}$$

   Donc on a bien, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$$

2. — Vérifions d'abord que la fonction f décroît. f est d'abord bien dérivable pour tout réel $t \geqslant 0$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\text{pour tout réel } t \geqslant 0,\ f'(t) = -1200\mathrm{e}^{-6t}$$

   Or, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-6t} & > 0 \\ -1200 & < 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(t) < 0 \Longrightarrow f \text{ est bien décroissante (strictement).}$$

   — Pour vérifier que la température tend à se stabiliser à la température ambiante (25 °C), nous allons calculer la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6t} = 0 \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} 200\mathrm{e}^{-6t} = 0 \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} 200\mathrm{e}^{-6t} + 25 = 25 = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

   La fonction f, qui représente la température de la baguette (en °C) au bout du temps, a pour limite 25 en $+\infty$. Cela signifie donc bien que la température tend à se stabiliser à la température ambiante de 25 °C.

   Donc la fonction f fournit un modèle en accord avec ces observations.

3. La fonction f est continue et décroissante strictement donc monotone sur $[0 : +\infty[$. Par ailleurs, $f(0) = 225$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique élément $c \in [0; +\infty[$ tel que $f(c) = 40$.

4. La courbe $\mathscr{C}_f$ semble atteindre 40 vers 0,43 heure soit $0,43 \times 60 = 25,8$ minutes. On trouve donc une valeur approchée de 26 minutes.

5. (a) On cherche une valeur approchée de D_0.

$$\begin{aligned} D_0 &= f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= f(0) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= 200\mathrm{e}^0 + 25 - \left(200\mathrm{e}^{-\frac{6}{60}} + 25\right) \\ &= 200 - 200\mathrm{e}^{-\frac{6}{60}} \\ &\approx 19,03 \end{aligned}$$

   Donc 19 est bien une valeur approchée de $\mathscr{D}_0$ à 0,1 près. Cela signifie que la diminution de température qui se fait lors de la première minute après la sortie du four est d'environ 19 °C. Au bout d'une minute, la baguette est donc à $225 - 19 = 206$ °C.

   (b)

$$\begin{aligned} D_n &= f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right) \\ &= 200\mathrm{e}^{-6\times\frac{n}{60}} + 25 - \left(200\mathrm{e}^{-6\times\frac{n+1}{60}} + 25\right) \\ &= 200\mathrm{e}^{-0,1n} - 200\mathrm{e}^{\frac{-6n-6}{60}} \\ &= 200\mathrm{e}^{-0,1n} - 200\mathrm{e}^{\frac{-6n}{60} + \left(\frac{-6}{60}\right)} \\ &= 200\mathrm{e}^{-0,1n} - 200\mathrm{e}^{-0,1n} \times \mathrm{e}^{-0,1} \\ \mathscr{D}_n &= 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right) \end{aligned}$$

   Pour étudier le sens de variation de la suite (D_n), on étudie le signe de $D_{n+1} - D_n$. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n &= 200\mathrm{e}^{-0,1(n+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right) - 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right) \\ &= 200\mathrm{e}^{-0,1n} \times \mathrm{e}^{-0,1}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right) - 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right) \\ D_{n+1} - D_n &= 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right)\left[\mathrm{e}^{-0,1} - 1\right] \end{aligned}$$

Étudions le signe de cette expression pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} 200\mathrm{e}^{-0,1n} & \geqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-0,1} & \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-0,1}-1 & \leqslant 0 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \mathscr{D}_{n+1}-\mathscr{D}_n \leqslant 0 \Longrightarrow \text{la suite } (\mathscr{D}_n) \text{ est décroissante.}$$

Calculons alors la limite de cette suite :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 200\mathrm{e}^{-0,1n} & = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-0,1} & = 1-\mathrm{e}^{-0,1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1}-1 & = \mathrm{e}^{-0,1}-1 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$$

Nous trouvons une limite de 0 pour D_n. Puisque la baguette tend à se stabiliser à la température ambiante, la diminution de température entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute va tendre vers 0. Le résultat était bien prévisible dans le contexte de l'exercice.