

Exercice 1 — Géométrie dans l'espace — Asie 18 mai 2022

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points

$$A(-3; 1; 3), B(2; 2; 3), C(1; 7; -1), D(-4; 6; -1) \text{ et } K(-3; 14; 14).$$

1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} , \vec{DC} et \vec{AD} .
 (b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
 (c) Calculer l'aire du rectangle ABCD.
2. (a) Justifier que les points A, B et D définissent un plan.
 (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2; 10; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).
 (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
3. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
 (b) Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
 (c) Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.
4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD.
 On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

Exercice 2 — Suites — Amérique du Nord 18 mai 2021

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
 (b) Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
 (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.
 (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
 (c) Calculer la limite de la suite (T_n) .
 (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C .

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

- (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
- (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x):
    T = 180
    n = 0
    while T > x:
        T = 0.955 * T + 0.9
        n = n + 1
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temp(120)`.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 — Probabilités — Métropole La Réunion 12 septembre 2023

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.

On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée.

Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie.

Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ».

On choisit une vache au hasard dans la région.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0,992;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984.

On désigne par :

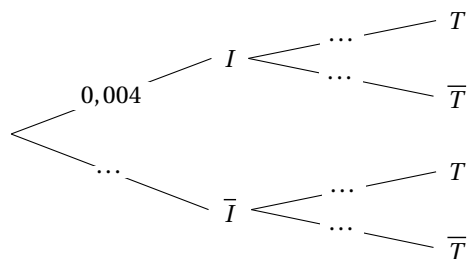
- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection »;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note \bar{I} l'évènement contraire de I et \bar{T} l'évènement contraire de T .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. (a) Calculer la probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif. On donnera le résultat à 10^{-3} près.
- (b) Montrer que la probabilité, à 10^{-3} près, que la vache présente un test positif est environ égale à 0,020.
- (c) La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. On donnera le résultat à 10^{-3} près.
- (d) Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test.
Calculer la probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.
 - (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
 - (b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.
 - (c) Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.
4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 4 — Fonction logarithme — La Réunion 28 mars 2023

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. (a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$.
(b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; +\infty[$. On notera α cette solution.
(b) En déduire le signe de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On la note F .
Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty \right]$? Justifier.
5. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
Quelle est la position de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à ses tangentes?
(b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
(c) Déduire des questions 5. a et 5. b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$$

Exercice 5 — Géométrie dans l'espace — Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.

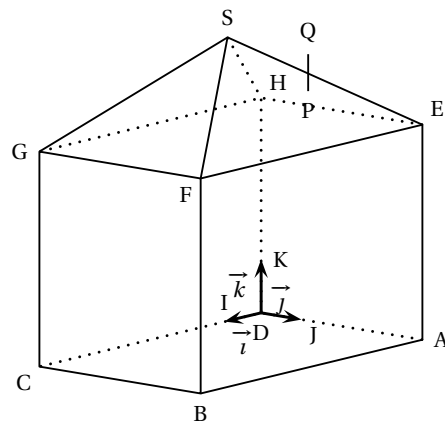
Soit les points I, J et K tels que

$$\vec{DI} = \frac{1}{6}\vec{DC}, \quad \vec{DJ} = \frac{1}{4}\vec{DA}, \quad \vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DH}.$$

On note $\vec{i} = \vec{DI}$, $\vec{j} = \vec{DJ}$, $\vec{k} = \vec{DK}$.

On se place dans le repère orthonormé $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3; 2; 6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. (a) Démontrer que le vecteur \vec{n} de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).
 (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.
4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :
 - le point P appartient au plan (EFS);
 - le point Q a pour coordonnées $(2; 3; 5,5)$;
 - la droite (PQ) est dirigée par le vecteur \vec{k} .

(a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- (b) En déduire les coordonnées du point P.
- (c) En déduire la longueur PQ de l'antenne.

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ .

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ]?

Exercice 6 — Équations différentielles — Métropole 7 juin 2021

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2xe^x$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2e^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

- (a) Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
 On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.
- (b) À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

- (a) Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans \mathbb{R} .
- (b) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur \mathbb{R} (les limites ne sont pas demandées).
- (c) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

Exercice 7 — Probabilités — Centres Étrangers 11 mai 2022

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.

On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
 On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
 On note respectivement \bar{A} et \bar{B} les évènements contraires de A et B .

Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.
- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.
- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	\bar{A}	Total
B			
\bar{B}			
Total			1

2. (a) Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.
 (b) Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.
 (c) Les évènements A et B sont-ils indépendants? Justifier la réponse.
3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.
 Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3} .

3. En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires?

Exercice 8 — Fonction exponentielle — Polynésie 13 mars 2023

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$ est convexe.
2. **Affirmation :** L'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans \mathbb{R} .

3. **Affirmation :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0.$$

4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$ et F la fonction définie sur \mathbb{R} par :
 $F(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$.

Affirmation : F est la primitive de f sur \mathbb{R} qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.

5. On considère la fonction mystere définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
 On rappelle que $\text{len}(L)$ représente la longueur de la liste L .

```
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S / len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])` renvoie 50.