Exercice 1 — Géométrie dans l'espace — Asie 18 mai 2022

1. (a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}$.

   (b) D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
   De plus le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5\times(-1)+1\times5+0\times(-4)=0$.
   Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

   (c) On a $AB^2=25+1=26$, d'où $AB=\sqrt{26}$;
   de même $AD^2=1+25+16=42$, d'où $AD=\sqrt{42}$.
   L'aire du rectangle ABCD est égale à
   $AB\times AD=\sqrt{26}\times\sqrt{42}=\sqrt{26\times42}=\sqrt{2\times13\times2\times21}=2\sqrt{13\times21}=2\sqrt{273}$.

2. (a) D'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

   (b) Soit le vecteur $\overrightarrow{n}(-2\,;\,10\,;\,13)$.
   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-10+10+0=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AD}=2+50-52=0$.
   Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), est normal à ce plan.

   (c) Le résultat précédent montre que le plan (ABD) a une équation de la forme
   $-2x+10y+13z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$.
   Or par exemple $B(2\,;\,2\,;\,3)\in(ABD)$ donc
   $-2\times2+10\times2+13\times3=d\iff-4+20+39=d\iff d=55$.
   Donc le plan (ABD) a pour équation $-2x+10y+13z=55$.

3. (a) Si Δ est orthogonale au plan (ABD) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. Comme elle contient K, on a donc :
   $M(x\,,\,y\,;\,z)\in\Delta\iff\overrightarrow{KM}=t\overrightarrow{n},\quad t\in\mathbb{R}$.
   Avec $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-14\\z-14\end{pmatrix}$ ceci se traduit par le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl}x+3&=&-2t\\y-14&=&10t\\z-14&=&13t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-2t-3\\y&=&10t+14\\z&=&13t+14\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$$

   (b) Si I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), le point I est un point de Δ ; comme c'est aussi un point de (ABD) ; ses coordonnées vérifient le système
   $$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-2t-3\\y&=&10t+14\\z&=&13t+14\\-2x+10y+13z&=&55\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$
   En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs expressions en fonction de t, on obtient :
   $-2(-2t-3)+10(10t+14)+13(13t+14)=55$
   $\iff4t+6+100t+140+169t+182=55\iff273t=-273\iff t=-1$.
   Les premières équations donnent alors
   $x=2-3=-1,\quad y=-10+14=4$ et $z=-13+14=1$.
   Le point I a donc pour coordonnées $(-1\,;\,4\,;\,1)$.

   (c) ABCD étant un rectangle le point D appartient au plan (ABD). Donc la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est [KI].
   $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}2\\-10\\-13\end{pmatrix}$ donne $KI^2=4+100+169=273$ et enfin $KI=\sqrt{273}$.

4. On a $V=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(ABCD)\times KI=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{273}\times\sqrt{273}=\dfrac{2\times273}{3}=\dfrac{2\times3\times91}{3}=182$.

Exercice 2 — Suites — Amérique du Nord 18 mai 2021

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ T_n\geqslant20$.
   Initialisation : $T_0=180\geqslant20$. L'initialisation est vérifiée.
   Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, et supposons que $T_n\geqslant0$. Montrons que $T_{n+1}\geqslant20$.
   $T_n\geqslant20\iff0,955\times T_n\geqslant0,955\times20\iff0,955T_n\geqslant19,1$
   $\iff0,955T_n+0,9\geqslant19,1+0,9\iff0,955T_n+0,9\geqslant20$. Donc $T_{n+1}\geqslant20$. L'hérédité est démontrée.
   Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ T_n\geqslant20$.

   (b) $\forall n\in\mathbb{N},\ T_{n+1}-T_n=0,955\ T_n+0,9-T_n=-0,045\ T_n+0,9=-0,045\left(T_n-\dfrac{0,9}{0,045}\right)$
   $=-0,045(T_n-20)$.
   Or d'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N},\ T_n\geqslant20$ donc $T_n-20\geqslant0$.
   Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ T_{n+1}-T_n\leqslant0$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

   (c) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=T_n-20$.

   (a) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=T_{n+1}-20=0,955\times T_n+0,9-20=0,955\ T_n-19,1=0,955\left(T_n-\dfrac{19,1}{0,955}\right)$
   $=0,955(T_n-20)=0,955\ u_n$.
   Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=0,955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0=T_0-20=160$.

   (b) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0\times q^n=160\times0,955^n$.
   De plus $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=T_n-20$ donc $T_n=u_n+20=160\times0,955^n+20$.

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty}0,955^n=0$ car $0,955\in]-1\,;\,1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=20$.

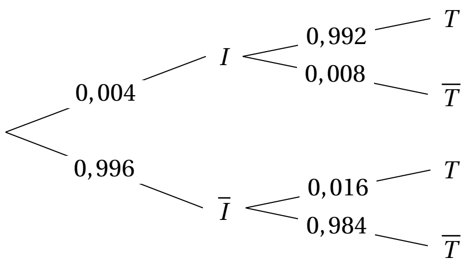
(d) $T_n \leqslant 120 \iff 160 \times 0,955^n + 20 \leqslant 120 \iff 160 \times 0,955^n \leqslant 120 - 20 \iff 160 \times 0,955^n \leqslant 100$
$\iff 0,955^n \leqslant \dfrac{100}{160} \iff 0,955^n \leqslant \dfrac{5}{8}$.
Sachant que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on obtient :
$\ln(0,955^n) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right) \iff n \times \ln(0,955) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$. Or $\ln(0,955) < 0$ donc,
$n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}$. À la calculatrice, $\dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)} \approx 10,21$ donc $n \geqslant 11$.

3. (a) Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.
   (b) La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leqslant x$.
   temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

Exercice 3 — Probabilités — Métropole La Réunion 12 septembre 2023

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. (a) La probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif est : $P\left(\overline{I} \cap \overline{T}\right) = 0,996 \times 0,984 \approx 0,980$.
   (b) La probabilité que la vache présente un test positif est $P(T)$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T) = P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) = 0,004 \times 0,992 + 0,996 \times 0,016 = 0,019\,904$ soit $0,020$ à 10^{-3} près,
   (c) La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif, c'est-à-dire : $P_T(I)$.
   $P_T(I) = \dfrac{P(I \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,004 \times 0,992}{0,02} \approx 0,199$
   (d) Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(\overline{I} \cap T\right)$, ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(I \cap \overline{T}\right)$.
   La probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache est donc : $P\left(\overline{I} \cap T\right) + P\left(I \cap \overline{T}\right) = 0,996 \times 0,016 + 0,004 \times 0,008 = 0,015\,968 \approx 0,016$ au millième près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.
   (a) L'expérience élémentaire consiste à savoir si, pour une vache donnée, le test est positif (avec une probabilité $p = 0,02$) ou non ; il n'y a donc que deux issues.
   On exécute cette expérience élémentaire 100 fois pour extraire un échantillon de taille $n = 100$ en assimilant ce choix à un tirage avec remise.
   La variable aléatoire X qui donne le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$.
   (b) La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est : $P(X = 3) = \dbinom{100}{3} \times 0,02^3 \times (1 - 0,02)^{100-3} \approx 0,182$.
   (c) La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est : $P(X \leqslant 3) \approx 0,859$ (résultat donné par la calculatrice).

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   La valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
   C'est-à-dire : $1 - P(X = 0) \geqslant 0,99$ ou encore : $0,01 \geqslant P(X = 0)$.
   On résout l'inéquation : $P(X = 0) \leqslant 0,01$.
   $P(X = 0) = \dbinom{n}{0} \times 0,02^0 \times (1 - 0,02)^{n-0} = 0,98^n$
   $0,98^n \leqslant 0,01 \iff \ln(0,98^n) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,98) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,98)}$
   Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,98)} \approx 227,95$ donc il faut un échantillon d'au moins 228 vaches pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 4 — Fonction logarithme — La Réunion 28 mars 2023

1. On cherche les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   - On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (3x+1-2x\ln(x)) = 1$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$.
   - $f(x) = x(3-2\ln(x))+1$.
     $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3-2\ln(x)) = -\infty$.
     On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(3-2\ln(x)) = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 3+0-2\times\ln(x)-2x\times\dfrac{1}{x} = 3-2\ln(x)-2 = 1-2\ln(x)$.

   (b) On étudier le signe de f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   $f'(x)>0 \iff 1-2\ln(x)>0 \iff \dfrac{1}{2}>\ln(x) \iff x<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

   $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\times\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\times\dfrac{1}{2} = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1 \approx 4,3$.

   On en déduit le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{1/2}+1$	↘	$-\infty$

3. (a) Le maximum de la fonction f vaut $2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+1>0$; on complète le tableau des variations de f.

x	0		$\mathrm{e}^{1/2}$		α		$+\infty$
f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{1/2}+1$	↘	0	↘	$-\infty$

   La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

   - Sur l'intervalle $\left]-\infty\,,\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution.
   - Sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appelle α.

   On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

   (b) D'après le tableau de variations précédent, le signe de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ est donné par le tableau :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

   Donc $f(x)>0$ sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(\alpha)=0$ et $f(x)<0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On la note F.
   La fonction F a pour dérivée la fonction f qui est positive sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,\alpha\right[$; donc F est croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée.

5. (a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$, on calcule la dérivée seconde f'' :

   $f''(x) = 0-2\times\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{x} < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$; on en déduit que la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$ et que sur cet intervalle, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessous des ses tangentes.

   (b) Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   T a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$.
   - $f(x) = 3x+1-2x\ln(x)$ donc $f(1) = 3\times1+1-2\times1\times\ln(1) = 4$
   - $f'(x) = 1-2\ln(x)$ donc $f'(1) = 1-2\times\ln(1) = 1$

   Donc T a pour équation $y = 1(x-1)+4$ soit $y = x+3$.

   (c) La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de ses tangentes donc de la tangente T et donc, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $f(x)\leqslant x+3$.

   $$f(x)\leqslant x+3 \iff 3x+1-2x\ln(x)\leqslant x+3 \iff 2x-2\leqslant 2x\ln(x) \iff \frac{2x}{2x}-\frac{2}{2x}\leqslant\ln(x)$$
   $$\iff 1-\frac{1}{x}\leqslant\ln(x)$$

   Donc, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $\ln(x)\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$.

Exercice 5 — Géométrie dans l'espace — Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

1. B(6 ; 4 ; 0), E(0 ; 4 ; 4), F(6 ; 4 ; 4), G(6 ; 0 ; 4).

2. On a $\mathscr{A}(\text{EFGH}) = 6 \times 4 = 24$.
La hauteur de la pyramide est égale à $6-4=2$, donc :
$V(\text{EFGHS}) = \dfrac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$.
D'autre part $V(\text{ABCDEFGH}) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.
Le volume de la maison est donc égal à $16+96=112$.
Or $\dfrac{V(\text{EFGHS})}{V(\text{maison})} = \dfrac{16}{112}\dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$.

3. (a) On a $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{ES}}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{\text{EF}} \cdot \overrightarrow{n} = 6\times 0 + 0\times 1 + 0\times 1 = 0$ et
$\overrightarrow{\text{ES}} \cdot \overrightarrow{n} = 3\times 0 - 2\times 1 + 2\times 1 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (EFS) est donc normal à ce plan.
(b) Le résultat précédent montre que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff 0x+1y+1z=d, \quad d\in\mathbb{R}$.
Or, par exemple $\text{E}(0\,;4\,;4) \in (\text{EFS}) \iff 0+4+4=d \iff d=8$.
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff y+z=8$.

4. (a) On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQ}) \iff \overrightarrow{\text{Q}M} = t\overrightarrow{k}, \quad (t\in\mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& 0t\\ y-3 &=& 0t\\ z-5,5 &=& 1t\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\\ y &=& 3\\ z &=& 5,5+t\end{array}\right., \quad (t\in\mathbb{R})$.
(b) Les coordonnées du point P vérifient les équations paramétriques de la droite (PQ) et du plan (EFS), donc du système :
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\\ y &=& 3\\ z &=& 5,5+t\\ y+z &=& 8\end{array}\right. \Rightarrow 3+5,5+t=8 \iff t=-0,5$.
Conclusion : $\text{P}(2\,;3\,;5)$.
(c) On a $\text{PQ}^2 = (2-2)^2+(3-3)^2+(5,5-5)^2 = 0,25$, donc $\text{PQ} = 0,5$.

5. Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ et la droite (PQ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
Elles sont sécantes s'il existe un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient les équations des deux droites soit le système :
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\\ y &=& 3\\ z &=& 5,5+t\\ x &=& -4+6s\\ y &=& 7-4s\\ z &=& 2+4s\end{array}\right.$
On en déduit (équations 1 et 4) que $2=-4+6s \iff 6=6s \iff s=1$ et (équations 3 et 6) que $5,5+t=2+4 \iff t=0,5$.
Il existe donc un point commun aux deux droites de coordonnées $(2\,;3\,;4)$
Reprenons les équations paramétriques de la droite (PQ) : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQ}) \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\\ y &=& 3\\ z &=& 5,5+t\end{array}\right., \quad (t\in\mathbb{R})$
L'abscisse et l'ordonnée de tous les points de cette droite sont fixes, seule la cote varie de 5 pour P (correspondant à $t=-0,5$ à 5,5 pour Q (correspondant à $t=0$) ; autrement dit les points du segment vérifient le système :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in [\text{PQ}] \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\\ y &=& 3\\ z &=& 5,5+t\end{array}\right., \quad (-0,5 \leqslant t \leqslant 0)$.
Le point commun aux deux droites correspond lui à $t=0,5$, donc n'appartient pas au segment [PQ] : autrement dit l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].

Exercice 6 — Équations différentielles — Métropole 7 juin 2021

1. De $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$, on déduit que $u'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2+2x\right) = x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x$, soit encore $u'(x) = u(x) + 2x\mathrm{e}^x$ ce qui signifie que u est une solution particulière de (E).
2. Soit $g(x) = f(x) - u(x)$
(a) f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :
$f'(x) = f(x) + 2x\mathrm{e}^x \quad (1)$.
Or $g(x) = f(x) - u(x) \iff f(x) = g(x) + u(x)$, d'où on déduit, les deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = g'(x) + u'(x)$.
L'égalité (1) devient : $g'(x) + u'(x) = g(x) + u(x) + 2x\mathrm{e}^x \quad (2)$.
Or on a vu dans la question précédente que $u'(x) = u(x) + 2x\mathrm{e}^x$
L'équation (2) devient donc : $g'(x) = g(x)$, ce qui signifie que la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
(b) On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions définies par $x \longmapsto K\mathrm{e}^x$, avec $K\in\mathbb{R}$.
Donc on a $g(x) = K\mathrm{e}^x$, $K\in\mathbb{R}$ et $f(x) = K\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$.
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies par : $f(x) = \left(K+x^2\right)\mathrm{e}^x$, $K\in\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction u

(a) On a $u'(x) = x(x+2)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u'(x)$ est celui du trinôme $x(x+2)$ qui a pour racines -2 et 0.
On sait que ce trinôme est positif, sauf entre les racines :
$u'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,-2[\cup[0\,;\,+\infty[$;
$u'(x) < 0$ sur $]-2\,;\,0[$;
$u'(-2) = u'(0) = 0$.

(b) De la question précédente il suit que u est croissante sauf sur $]-2\,;\,0[$ où elle est décroissante, $u(-2) = 4\mathrm{e}^{-2}$ et $u(0) = 0$ étant les deux extremums de la fonction sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
u		$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) u' est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$:
$u''(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x + \left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2+4x+2\right)$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u''(x)$ est celui du trinôme $x^2+4x+2 = (x+2)^2-4+2 = (x+2)^2-2 = (x+2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(x+2+\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right)$.
Les racines de ce trinôme sont donc $-\sqrt{2}-2$ et $-\sqrt{2}+2$.
Le trinôme donc $u''(x)$ sont négatifs entre les racines.
Conclusion : la fonction est concave sur l'intervalle $]-\sqrt{2}-2\,;\,+\sqrt{2}-2[$.

Exercice 7 — Probabilités — Centres Étrangers 11 mai 2022

Partie A

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\overline{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

2. (a) La probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2 est l'évènement contraire de l'évènement « une paire de verres ne présente aucun des deux défauts », donc sa probabilité est égale $1-0,75 = 0,25$. Ou encore $P(A\cup B) = 1-\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$.

(b) • On a $P\left(\overline{A}\right) = 1-P(A) = 1-0,1 = 0,9$;
• On a $P\left(\overline{B}\right) = 1-P(B) = 1-0,2 = 0,8$.
Donc $P\left(A\cap\overline{B}\right) = 0,8-0,75 = 0,05$ et
$P\left(B\cap\overline{A}\right) = 0,9-0,75 = 0,15$.
Donc la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts est égale à :
$P(A\cap B) = 1-P\left(A\cap\overline{B}\right)-P\left(B\cap\overline{A}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 1-0,05-0,15-0,75 = 0,05$.

(c) $P(A)\times P(B) = 0,1\times 0,2 = 0,02$ et $P(A\cap B) = 0,05$.
On a donc $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. On a $P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(B\cap\overline{A}\right) = 0,05+0,15 = 0,2$
4. On a $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,05}{0,1} = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

1. La production est suffisamment importante pour que la probabilité d'avoir le défaut $T1$ est égale à 0,1. Comme il y a 50 tirages indépendants, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.
2. On sait que $P(X=10) = \binom{50}{10}\times 0,1^{10}\times(1-0,1)^{50)10}$.
La calculatrice donne $P(X=10) \approx 0,015$ au millième près.
3. La moyenne est l'espérance de la variable X et on sait que $E(X) = n\times p = 50\times 0,1 = 5$.

Exercice 8 — Fonction exponentielle — Polynésie 13 mars 2023

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(x) = \mathrm{e}^x-1$, puis $f''(x) = \mathrm{e}^x$.
On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit x, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. l'affirmation est vraie.
2. **Affirmation :**L'équation $(2\mathrm{e}^x-6)(\mathrm{e}^x+2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
Cette équation se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2\mathrm{e}^x-6 & = & 0 & \text{ou} \\ \mathrm{e}^x+2 & = & 0 & \end{array}\right.$$

• On sait (voir ci-dessus) que $\mathrm{e}^x > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x+2 > 2 > 0$. Donc la deuxième équation n'a pas de solution.
• $2\mathrm{e}^x-6 = 0 \iff 2\mathrm{e}^x = 6 \iff \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$, par croissance de la fonction logarithme népérien : c'est la seule solution donc l'affirmation est vraie.

3. **Affirmation :**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x-x} = 0.$$

On a $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-x} = \dfrac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1-xe^{-x}\right)} = e^x\dfrac{\left(1-e^{-2x}\right)}{\left(1-xe^{-x}\right)}$.

- Au numérateur on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-2x} = 1$;
- Au dénominateur $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ et l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-xe^{-x} = 1$.

Le quotient a pour limite 1 et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-x} = +\infty$: l'affirmation est fausse.

4. La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x+1)e^{3x} = e^{3x}(2+6x+3) = (6x+5)e^{3x} = f(x)$.
D'autre part $F(0) = 1e^0 + 4 = 1+4 = 5$
F est donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x=0$, l'affirmation est vraie.

5. L'execution donne $\dfrac{1+9+\ldots+5}{10} = \dfrac{50}{10} = 5$.
L'affirmation est fausse.