Analyse

Suites (1ère partie)

Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :

- (Initialisation) $P(0)$ est vraie.
- (Hérédité) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on suppose que $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Somme (1)

Pour tout entier naturel n,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

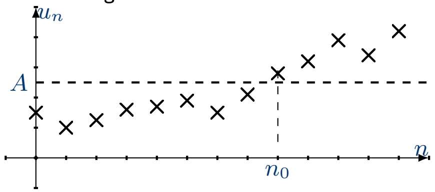
Somme (2)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Si $q \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Suite tendant vers $+\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=+\infty$ si tout intervalle du type $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

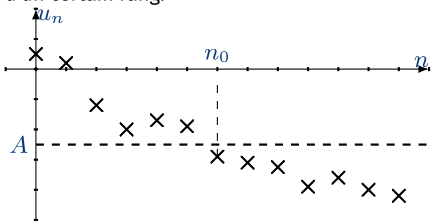


Exemples fondamentaux

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n=+\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3=+\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2=+\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}=+\infty$

Suite tendant vers $-\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Théorème de comparaison

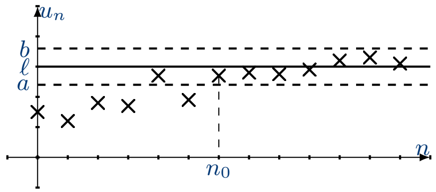
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=+\infty$

Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=+\infty$.

Suites convergentes

On dit que (u_n) tend vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que (u_n) converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=\ell$.



Exemples fondamentaux

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}=0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3}=0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2}=0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=\lim\limits_{n \to +\infty} w_n=\ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=\ell$

Limites de e^n et e^{-n}

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n=+\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n}=0$

Somme de limites

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n+v_n=$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit de limites

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n=$	$\ell \times \ell'$	∞	$F.I.$	∞

Quotient de limites

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	0	∞
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ'	0	∞
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}=$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	F.I	F.I.

Formes indéterminées (F.I.)

Il y a quatre formes indéterminées : $(+\infty)+(-\infty)$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.
Pour lever une forme indéterminée, il faut modifier l'expression de la suite. Par exemple, si on a une somme alors on essaye de la factoriser, et si on a un produit, on essaye de le développer.
Dans le cas d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle, pour lever la forme indéterminée il faut factoriser par le monôme de plus haut degré.

Suites (2ème partie)

Inégalité de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a>0$,
$(1+a)^n \geqslant 1+an$

Limite de q^n

Soit q un nombre réel.

- Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n=+\infty$.
- Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n=1$.
- Si $-1<q<1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n=0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Suites majorées, minorées, bornées

Soit (u_n) une suite.

- On dit que cette suite est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. Dans ce cas, M s'appelle un majorant de la suite (u_n).
- On dit que cette suite est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n$. Dans ce cas, m s'appelle un minorant de la suite (u_n).
- On dit que cette suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone

- Si une suite (u_n) est croissante et majorée par M, alors elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant M$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et minorée par m, alors elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \geqslant m$.

Suites croissantes non majorées

- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Compléments sur la dérivation

Taux d'accroissement

Le taux d'accroissement d'une fonction entre a et $a+h$ est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Nombre dérivé

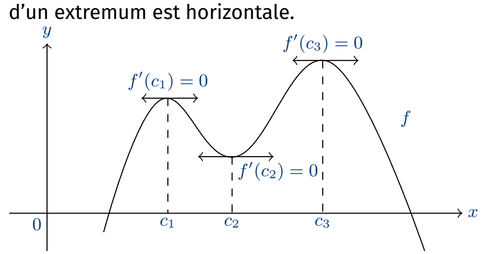
Le nombre dérivé d'une fonction en un point a est la limite du taux d'accroissement entre a et $a+h$ (si elle existe) : $f'(a)=\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Tangente

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'une fonction f en un point d'abscisse a est égal au nombre dérivé $f'(a)$.
Une équation de la tangente en a est :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Dérivée et extrema

Si f admet un extremum local en c alors $f'(c)=0$.
Conséquence : la tangente à la courbe de f au niveau d'un extremum est horizontale.



Réciproque : si f' s'annule en point c en changeant de signes, alors f admet un extremum local en ce point.

Fonctions dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x)=k$ $(k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations et dérivation

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(ku)' = ku'$ ($k \in \mathbb{R}$)
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Théorème fondamental

- f est croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \geqslant 0$ sur I
- f est décroissante sur I si, et seulement si, $f''(x) \leqslant 0$ sur I

Dérivée d'une fonction composée (1)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$. La fonction qui à $x \in I$ associe $v(u(x))$ s'appelle la **fonction composée** de u par v et se note $v \circ u$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & u(x) \arrow[r, "v"'] & v(u(x)) \end{tikzcd}$$

Dérivée d'une fonction composée (1)

$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Dérivée d'une fonction composée (2)

La dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto a \times f'(ax+b)$

Dérivée d'une fonction composée (3)

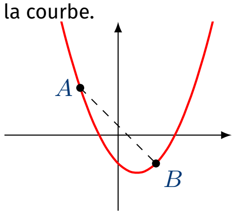
- $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$
- $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Dérivée seconde d'une fonction

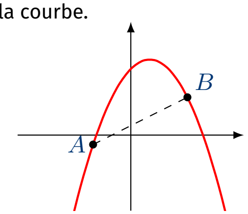
On appelle **dérivée seconde** d'une f la dérivée de la fonction dérivée f' et on la note f''.

Fonction convexe, fonction concave

- On dit que f est **convexe** sur I si pour tous points A et B de la courbe, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe.



- On dit que f est **concave** sur I si pour tous points A et B de la courbe, le segment $[AB]$ est situé en dessous de la courbe.

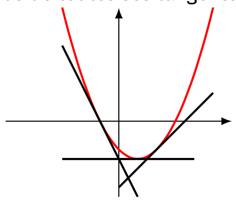


Convexité et dérivée première

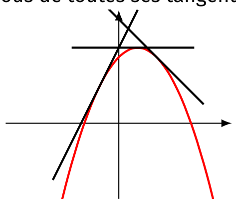
- f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, f' est décroissante sur I.

Convexité et tangentes

- f est convexe sur I si, et seulement si, la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur I.



- f est concave sur I si, et seulement si, la courbe de f est en dessous de toutes ses tangentes sur I.

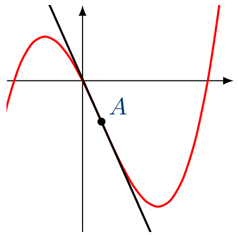


Convexité et dérivée seconde

- f est convexe sur I si, et seulement si, $f''(x) \geqslant 0$ sur I
- f est concave sur I si, et seulement si, $f''(x) \leqslant 0$ sur I

Points d'inflexion

On dit qu'un point A de la courbe de f est un **point d'inflexion** si la tangente à la courbe au point A traverse la courbe.

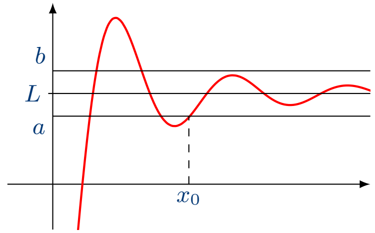


Le point A de la courbe de la courbe d'abscisse a est un point d'inflexion si, et seulement si, $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

Limites de fonctions

Limite finie en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand.



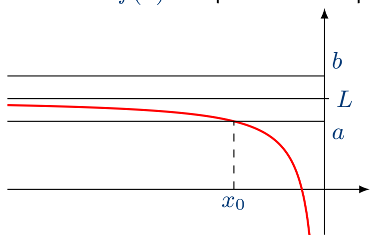
Exemples fondamentaux en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Limite finie en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les $f(x)$ dès que x est assez petit.



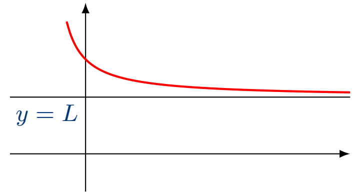
Exemples fondamentaux en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

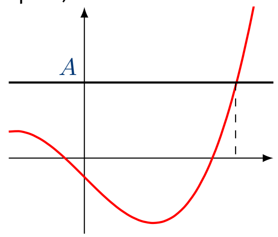
Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.



Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$) si pour tout réel A, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les $f(x)$ dès que x est suffisamment grand (respectivement dès que x est suffisamment petit).



Exemples fondamentaux

Limites en $+\infty$:

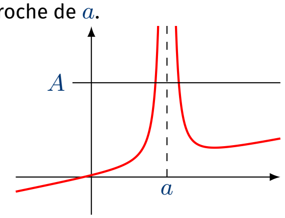
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Limites en $-\infty$:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Limite infinie en un point a

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si pour tout nombre réel A, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

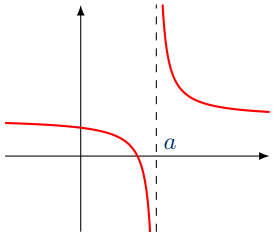


Exemples fondamentaux

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Asymptote vertical

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe d'une fonction f si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.



Opération sur les limites : somme

Dans les tableaux suivants, a désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' sont des réels.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Opération sur les limites : produit

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) =$	$\ell\times\ell'$	∞	$F.I.$	∞

Opération sur les limites : quotient

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	0	∞
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ'	0	∞
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	F.I	F.I.

Limite d'une fonction composée

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} g(X) = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$

Théorèmes de comparaison

Soit a un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- si pour tout réel x voisin de a on a $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
- si pour tout réel x voisin de a on a $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes

Soit a un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si :

- pour x voisin de a, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Limites de la fonction exponentielle

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Croissances comparées

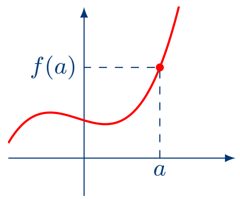
Pour tout entier naturel n,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$

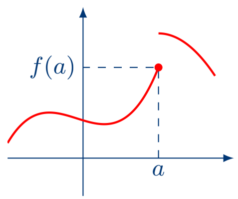
Continuité

Continuité d'une fonction

- On dit que f est **continue** en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue** sur I si, f est continue en tout point a de l'intervalle I.



f est continue en a



f n'est pas continue en a

Continuité des fonctions usuelles

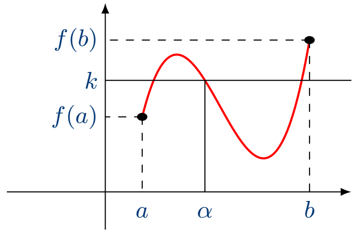
- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle, la fonction racine carrée et la fonction valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Dérivabilité et continuité

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

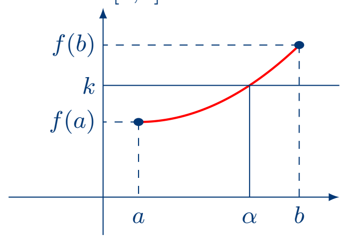


Corollaire du TVI

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et k un réel. On suppose que :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est strictement monotone sur $[a, b]$
- k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

alors l'équation $f(x) = k$ possède une **unique** solution α sur $[a, b]$.



x	a α b
f	$f(a)$ ↗ k ↗ $f(b)$

Image d'une suite convergente par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit (u_n) une suite à valeurs dans I.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ de I alors $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

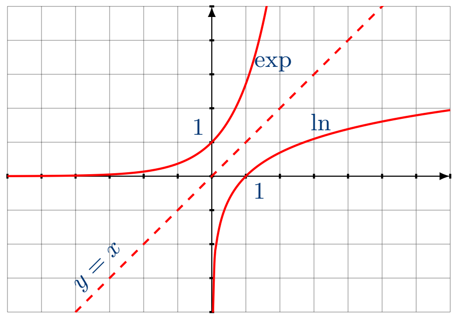
Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ vérifie l'égalité $\ell = f(\ell)$.

Fonction logarithme

Fonction réciproque de la fonction exponentielle

- Si $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ possède une unique solution qu'on appelle **logarithme népérien** de a et qu'on note $\ln(a)$.
- La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à $x > 0$ associe $\ln(x)$.
- Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Premières propriétés du logarithme

- Pour tout réel a et tout $b > 0$, $b = \mathrm{e}^a \iff a = \ln(b)$.
- Pour tout réel a, $\ln(\mathrm{e}^a) = a$
- Pour tout réel $b > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(b)} = b$
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$

Relation fonctionnelle (1)

Pour tout $a > 0$, pour tout $b > 0$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Relation fonctionnelle (1)

Pour tous nombres $a > 0$ et $b > 0$,

- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ $(n \in \mathbb{N})$
- $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Limites aux bornes

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$

Dérivée et sens de variation

La fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,
$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Sens de variation

- $\ln(a)=\ln(b) \iff a=b$
- $\ln(a)<\ln(b) \iff a<b$

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Signe de la fonction logarithme

$\ln(x)>0 \iff x>1$ et $\ln(x)<0 \iff x<1$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

Croissances comparées

Pour tout entier naturel n,

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n\ln(x)=0$

Fonction composée avec le logarithme

$(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$.

Primitives et équations différentielles

Notion d'équation différentielle

- Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction, ses dérivées successives et la variable x.
- On dit que la fonction F est solution de l'équation différentielle $y'=f$ si, et seulement si, F est dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

Primitive d'une fonction sur un intervalle

On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f si pour tout $x\in I$, $F'(x)=f(x)$.
Autrement dit, F est une primitive de f si F est solution de l'équation différentielle $y'=f$.

Lien entre primitives d'une même fonction

Si F et G sont deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I alors il existe un réel k tel que $G=F+k$.

Unique primitive prenant une valeur donnée

Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0)=y_0$.

Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F
$f(x)=a$	$F(x)=ax$
$f(x)=x^n (n\in\mathbb{N})$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}(n>1)$	$F(x)=\dfrac{-1}{n-1}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$
$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$	$F(x)=\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$

Somme et produit par un réel

Soit f et g deux fonctions et soit F et G deux primitives de ces fonctions.

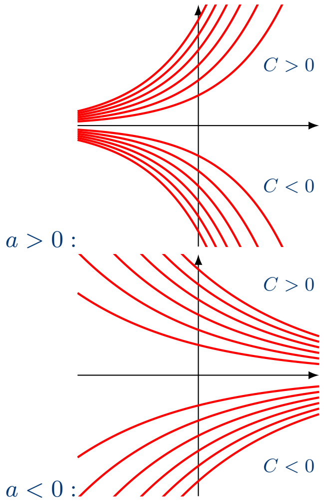
- Une primitive de $f+g$ est $F+G$.
- Si $k\in\mathbb{R}$, une primitive de $k\times f$ est $k\times F$.

Primitives et composées

Fonction f	Domaine de validité	Une primitive F
$f=u^n\times u'\ (n\in\mathbb{N})$	I	$F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f=\dfrac{u'}{u^n}\ (n>1)$	en tout $x\in I$ tel que $u(x)\neq 0$	$F=\dfrac{-1}{n-1}\times\dfrac{1}{u^{n-1}}$
$f=\dfrac{u'}{u}$	en tout $x\in I$ tel que $u(x)\neq 0$	$F=\ln(\lvert u\rvert)$
$f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	en tout $x\in I$ tel que $u(x)>0$	$F=2\sqrt{u}$
$f=u'\mathrm{e}^u$	I	$F=\mathrm{e}^u$
$f=u'\cos(u)$	I	$F=\sin(u)$
$f=u'\cos(u)$	I	$F=-\cos(u)$
$f=u'\times(v'\circ u)$	I	$F=v\circ u$

Équation différentielle $y'=ay$

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto C\times\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.
- L'allure des courbes des solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ est la suivante :



Équation différentielle $y'=ay+b$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto C\times\mathrm{e}^{ax}-\dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

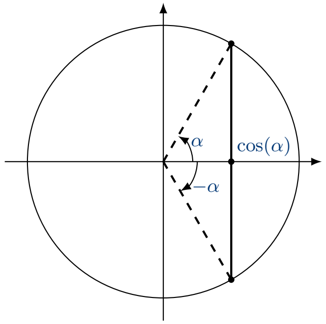
Équation différentielle $y'=ay+f$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+f$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto C\times\mathrm{e}^{ax}+g(x)$ où C est une constante réelle et où g est une solution particulière de l'équation $y'=ay+f$.

Fonctions sinus et cosinus

Équation $\cos(x)=a$

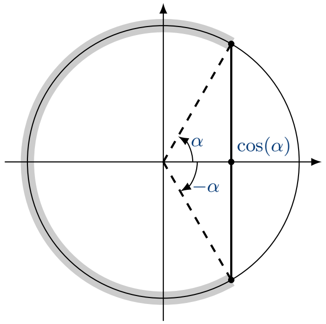
$\cos(x)=\cos(\alpha) \iff x=\alpha+k\times 2\pi$ ou $x=-\alpha+k\times 2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$



Pour résoudre une équation du type $\cos(x)=a$, on essaie d'abord d'écrire a sous la forme $a=\cos(\alpha)$.

Inéquation $\cos(x)\leqslant a$

Pour résoudre une inéquation de la forme $\cos(x)\leqslant\cos(\alpha)$, on repère tous les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est inférieure ou égale à $\cos(\alpha)$.



Pour résoudre une équation du type $\cos(x)\leqslant a$, on essaie d'abord d'écrire a sous la forme $a=\cos(\alpha)$.

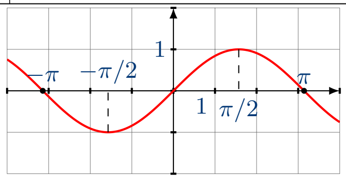
Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0

Fonction sinus

- La fonction sinus est 2π-périodique :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
- La fonction sinus est impaire :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.

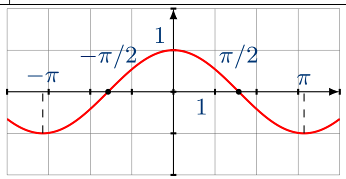
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Fonction cosinus

- La fonction cosinus est 2π-périodique :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- La fonction cosinus est paire :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Calcul intégral

Unités d'aire

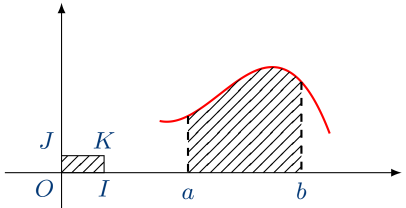
Si (O, I, J) est un repère orthogonal, on appelle unité d'aire (ou u.a.) l'aire du rectangle $OIJK$ où $K(1;1)$.

Intégrale d'une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. L'**intégrale** de a à b de f est l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine compris entre :

- la courbe $\mathcal{C}$ de f
- l'axe des abscisses
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale de a à b de f se note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Théorème fondamental

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Calcul d'une intégrale avec une primitive

Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Ce nombre se note aussi $[F(t)]_a^b$.

Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Si f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I alors l'intégrale de a à b de f est définie par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Relation de Chasles

Pour tous réels a, b et c dans I,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Soit k un réel.

- $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b k \times f(x)\,\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Positivité de l'intégrale

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$
- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Intégration par parties

Pour tous réels a et b,

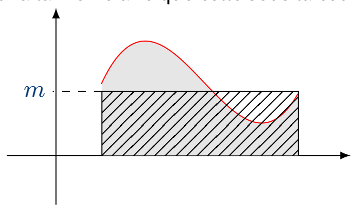
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Valeur moyenne d'une fonction

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

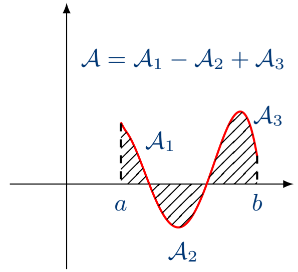
La valeur moyenne est la hauteur du rectangle de base $b - a$ qui a la même aire que celle sous la courbe de f.



Aire sous une courbe

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

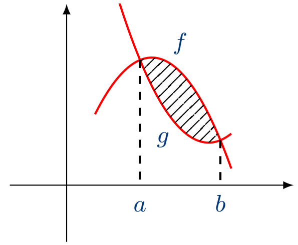
- Si f est positive sur $[a, b]$, $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est négative sur $[a, b]$, $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est de signe quelconque sur $[a, b]$, on décompose la courbe selon que la fonction est positive ou négative.



Aire entre deux courbes

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan délimité par les courbes de f, de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$$



Dénombrement et probabilités

Combinatoire et dénombrement

Rappels sur les ensembles

Soit E et F deux ensembles.

- On dit que deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire lorsque $E \cap F = \emptyset$.
- On dit que F est inclus dans E si tous les éléments de F appartiennent à E. On note $F \subset E$.

Principe additif

Si E est un ensemble fini à n élements, si F un ensemble fini à m éléments alors et si E et F sont disjoints alors $E \cup F$ possède exactement $n + m$ éléments.

Produit cartésien

Le produit cartésien $E \times F$ (« E croix F ») est l'ensemble des couples $(x; y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Principe multiplicatif

Si E un ensemble fini non vide à n éléments et F un ensemble fini non vide à m éléments alors l'ensemble $E \times F$ possède $n \times m$ éléments.

Ensemble des k-uplets d'un ensemble

L'ensemble $E \times E \times \cdots \times E$ se note E^k et ses éléments s'appellent des k-uplets ou k-listes de E.
Un k-uplet de E est donc une suite $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ de k éléments de E.

Nombre de k-uplets d'un ensemble

Si E est un ensemble fini à n éléments, le nombre de k-uplets de E est n^k.

Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Soit k un entier naturel non nul et soit E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts (c'est-à-dire qui ne contiennent pas deux fois le même élément) est
$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$

Permutations

Soit E un ensemble fini à n éléments. Une permutation est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Factorielle d'un entier

Pour tout entier naturel n,
$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
Par convention, on pose $0! = 1$.

Nombre de permutations

Soit E un ensemble fini à n éléments. Il y a exactement $n!$ permutations de E.

Nombre de parties d'un ensemble

- Soit E un ensemble. Un ensemble F s'appelle une partie de E si F est inclus dans E ($F \subset E$).
- Soit E un ensemble fini à n éléments. Alors E possède exactement 2^n parties.

Combinaisons

Soit E un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

- On appelle combinaison de k éléments de E toute partie de E qui possède k éléments.
- Le nombre de combinaisons de k éléments de E se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Nombre de combinaisons

Soit n un entier naturel et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Symétrie des combinaisons

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un tableau qui permet de déterminer les nombres $\binom{n}{k}$, de la façon suivante :

- les nombres de la première colonne valent 1
- les nombres de la diagonale valent 1
- chaque autre nombre est la somme du nombre situé juste au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Somme du nombre de combinaisons

La somme des éléments de la ligne d'indice n du triangle de Pascal vaut 2^n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Loi binomiale

Épreuves indépendantes

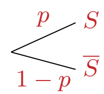
Deux épreuves sont indépendantes si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat de l'autre.

Succession d'épreuves indépendantes

- L'univers d'une succession de n épreuves dont les univers sont Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.
- Une issue est alors un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où x_i est une issue de la i-ème épreuve. Sa probabilité est égale au produit des probabilités de chacune des issues x_i du n-uplet.

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : l'une qu'on appelle « succès » (noté S) dont la probabilité est notée p et l'autre qu'on appelle « échec » (noté $\overline{S}$) dont la probabilité est $1-p$.



Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli si X prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec dans une épreuve de Bernoulli.
Sa loi de probabilité est :

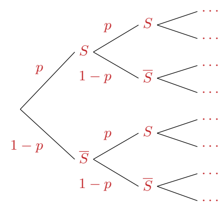
x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Éspérance et variance de la loi de Bernoulli

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois de suite de manière **identique** et **indépendante** une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.



Nombre de chemins avec k succès

Dans un arbre associé à un schéma de Bernoulli à n répétitions, il y a $\binom{n}{k}$ chemins contenant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs).

Loi binomiale

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Loi de probabilité d'une loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité d'avoir k succès est :
$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Sommes de variables aléatoires

Produit d'une variable aléatoire par un réel

Si X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et a est un réel, la variable aléatoire aX est la variable aléatoire qui prend les valeurs ax_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) telle que
$P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.

Somme de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires qui prennent les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \cdots, y_m$. La variable aléatoire $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs $x_i + y_j$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$) telle que $P(X + Y = k)$ est la somme de toutes les probabilités $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ pour lesquels $x_i + y_j = k$.

Linéarité de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires et a un réel.

- $E(aX) = aE(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Variables indépendantes

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si elles sont associées à des épreuves indépendantes.

Variance pour des variables indépendantes

Soit X et Y deux variables indépendantes et a un réel.

- $V(aX) = a^2 V(x)$.
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Loi binomiale et somme de variables de Bernoulli

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors X peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Échantillon d'une loi de probabilité

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes cette loi de probabilité.

Somme et moyenne d'un échantillon

- La somme d'un échantillon est la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
- La moyenne d'un échantillon est la variable aléatoire $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Espérance, variance et écart-type de la somme d'un échantillon

- $E(S_n) = nE(X_1)$
- $V(S_n) = nV(X_1)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_1)$

Espérance, variance et écart-type de la moyenne d'un échantillon

- $E(M_n) = E(X_1)$
- $V(M_n) = \dfrac{V(X_1)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$

Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X un variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Pour tout nombre réel $\delta > 0$,
$P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$

Inégalité de concentration

Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de la loi de probabilité d'une variable X d'espérance μ et de variance V, alors
$\forall \delta > 0, P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{n\delta^2}$

Loi des grands nombres

Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de la loi de probabilité d'une variable X d'espérance μ et de variance V, alors
$\forall \delta > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$

Algorithmique et programmation

Algorithmique

Liste en Python

En Python, une liste est une suite finie et ordonnée d'éléments qui peuvent être de type différent. Pour définir une liste, on utilise des crochets `[` et `]`.
Par exemple, `[1,True,"bonjour"]`.

Indices des éléments d'une liste

Chaque élément d'une liste est repéré par un indice `k` :

- Le 1er élément de la liste est l'élément d'indice 0
- Le 2ème élément est l'élément d'indice 1
- Le 3ème élément est l'élément d'indice 2
- Etc.

Pour obtenir l'élément d'indice `k` d'une liste `L`, on écrit `L[k]`.

Instructions relatives aux listes en Python

- Pour accéder au nombre d'éléments d'une liste, on utilise la fonction `len`.
- Pour concaténer deux listes `L` et `M` (c'est-à-dire les mettre l'une à la suite de l'autre), on écrit `L+M`.
- Pour tester si un élément `x` apparaît dans une liste `L`, on écrit `if x in L`.
- Pour tester si un élément `x` n'apparaît pas dans une liste `L`, on écrit `if x not in L`.

Générer une liste par extension

Définir une liste en **extension**, c'est la définir en donnant tous ses éléments.
Par exemple, la liste `L = [4,1,7,4]` est définie en extension.

Générer une liste par ajouts successifs

Définir une liste par **ajouts successifs** consiste à partir d'une liste (en général vide) et à ajouter des éléments à cette liste au fur et à mesure à l'aide de la fonction `append`.
Par exemple,

```
for k in range(0,5):
    L.append(k**2)
```

Générer une liste par compréhension

Définir une liste en **compréhension**, c'est définir cette liste à l'aide d'une formule dont la variable parcourt un certain ensemble. Cela se présente sous l'une des deux formes suivantes :

- `L = [formule for variable in ensemble]`
- `L = [formule for variable in ensemble if condition]`

Par exemple,

```
L1 = [k+3 for k in range(1,6)]
L2 = [2**n for n in range(1,7) if
n%2==0]
```

Manipuler les éléments d'une liste

Soit `L` une liste.

- Pour supprimer l'élément d'indice `k`, on écrit : `del(L[k])`.
- Pour modifier l'élément d'indice `k`, on écrit : `L[k] = valeur`.
- Pour ajouter un élément à la suite d'une liste, on écrit : `L.append(valeur)`

Parcourir une liste

Pour parcourir tous les éléments d'une liste `L`, on peut utiliser une boucle bornée (`for`) où le compteur parcourt tous les indices en allant de `0` à `len(L)-1`.
Pour cela, on écrit `for k in range(0,len(L))`.

```
L = [4, 8, 10, 12]
for k in range(0,len(L)):
    L[k] = L[k] + 5
```

Itérer sur les éléments d'une liste

En Python, on peut parcourir une liste en appelant l'instruction `for element in L:`. Dans ce cas, la variable `element` prend successivement toutes les valeurs de la liste `L`. On dit alors qu'on **itère** sur les éléments de la liste.
Par exemple,

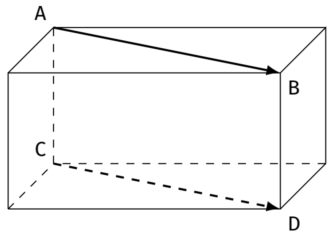
```
L = [5, 4, 3, 2, 1, 0]
for nombre in L:
    print(nombre ** 2)
```

Géométrie dans l'espace

Vecteurs, droites et plans de l'espace

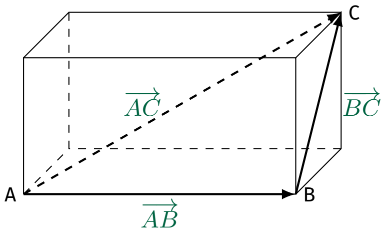
Vecteurs et translations

- Soit A et B deux points de l'espace. La translation qui transforme A en B est la transformation qui à tout point C associe le point D tel que $ABDC$ est un parallélogramme. On dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par sa direction (la droite (AB)), par son sens (de A vers B) et par sa norme (la distance AB notée $||\overrightarrow{AB}||$).
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.



Somme de vecteurs et relation de Chasles

La somme de vecteurs de l'espace est définie de manière identique à celle dans le plan.
Si A, B et C sont trois points de l'espace alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Colinéarité de vecteurs

- Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de l'espace et k est un réel, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a la même direction que $\overrightarrow{u}$, le même sens si $k \geqslant 0$ ou le sens contraire si $k < 0$ et dont la norme est $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$
- Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Combinaisons linéaires de vecteurs

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ des vecteurs de l'espace. On dit que $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ s'il existe des réels x, y et z tels que
$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w} + z\overrightarrow{t}$.

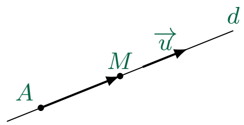
Vecteur linéairement indépendants

On dit que des vecteurs sont linéairement indépendants si on ne peut pas exprimer l'un comme combinaison linéaire des autres.

Caractérisation d'une droite de l'espace

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.

- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$, où $k \in \mathbb{R}$, s'appelle une droite.
- Le vecteur $\overrightarrow{u}$ s'appelle un vecteur directeur et le couple $(A; \overrightarrow{u})$ s'appelle un repère de cette droite.



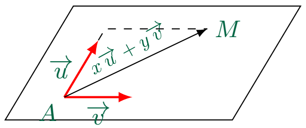
Droites parallèles

Soit d et d' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On dit que d et d' sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Caractérisation d'un plan de l'espace

Soit A un point de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, s'appelle un plan.
- Le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ s'appelle une base (ou vecteurs directeurs) et le triplet $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ s'appelle un repère de ce plan.

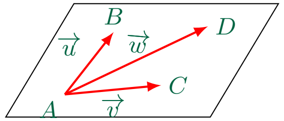


Si A, B et C sont trois points non alignés, le plan (ABC) est par définition le plan $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Vecteurs coplanaires

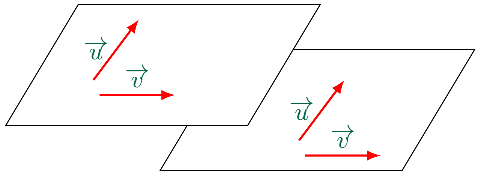
On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si on peut écrire l'un comme une combinaison linéaire des deux autres.

- Quatre points A, B, C et D appartiennent à un même plan si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont incluses dans un même plan si, et seulement si, es vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

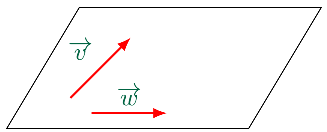


Plans parallèles, droite parallèle à un plan

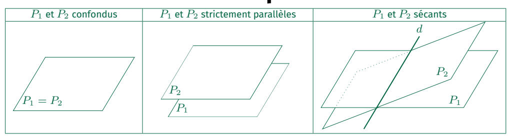
On dit que deux plans sont parallèles si un couple de vecteurs directeurs de l'un est aussi un couple de vecteurs directeurs de l'autre.



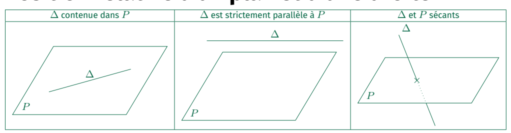
Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et P un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. On dit que la droite d est parallèle au plan P si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.



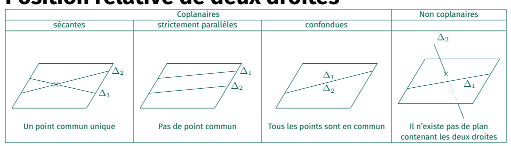
Position relative de deux plans



Position relative d'un plan et d'une droite



Position relative de deux droites



Bases de l'espace

On appelle **base** de l'espace tout triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$.

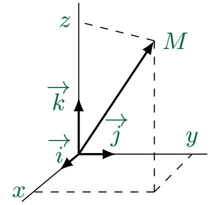
On dit alors que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Repères de l'espace

On appelle **repère** de l'espace tout quadruplet $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où O est un point de l'espace et où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace.

Coordonnées d'un point dans un repère

Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace et soit M un point. L'unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ s'appelle les coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.



Opérations sur les coordonnées

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\overrightarrow{AB}$ sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Les coordonnées de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} \alpha + \alpha' \\ \beta + \beta' \\ \gamma + \gamma' \end{pmatrix}$ et celles du vecteur $k\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} k\alpha \\ k\beta \\ k\gamma \end{pmatrix}$.

Représentation paramétrique d'une droite

Soit Δ une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

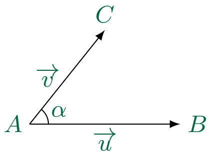
$$M \in \Delta \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$$

Ces équations s'appellent une représentation paramétrique de la droite Δ.

Orthogonalité dans l'espace

Définition du produit scalaire (1)

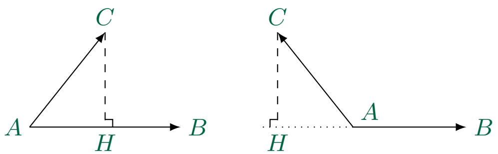
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = AB \times AC \times \cos(\alpha)$



Définition du produit scalaire (2)

Soit H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :
  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ n'ont pas même sens :
  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$



Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$

Identités remarquables

- $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$
- $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$

Formules de polarisation

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.

Vecteurs orthogonaux

On dit que deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Bases et repères orthonormés

- On dit qu'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormée** si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et s'ils sont tous de norme 1.
- On dit qu'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors :

$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $A(x_A, y_A, z_A)$, et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points alors :

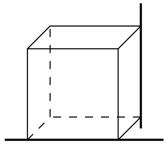
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Orthogonalité de droites

- On dit que deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.
- On dit que deux droites sont perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

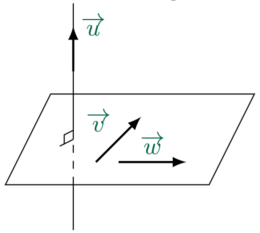
Condition d'orthogonalité (deux droites)

Deux droites sont orthogonales si, et seulement si, il existe une droite parallèle à l'une qui est perpendiculaire à l'autre.



Orthogonalité d'un plan et d'une droite

On dit qu'une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si, et seulement si, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.

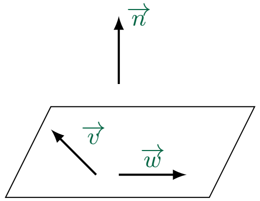


Condition d'orthogonalité (droites et plans)

- Une droite d est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.
- Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

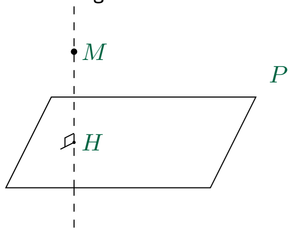
Vecteur normal

Soit P un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan P si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

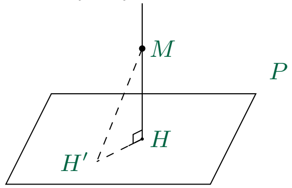


Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point H d'intersection du plan P avec la droite passant par M orthogonale à P.

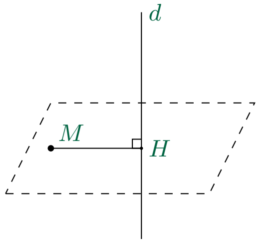


Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point H de P le plus proche de M.



Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point H d'intersection de de la droite d avec le plan orthogonal à d passant par M.

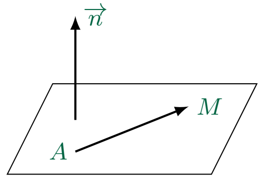


Distance d'un point à une droite ou à un plan

La distance d'un point à une droite ou à un plan est la distance de ce point à son projeté orthogonal sur cette droite ou sur ce plan.

Caractérisation des points d'un plan

Soit P un plan de l'espace. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à P et A un point de ce plan. Un point M de l'espace appartient à P si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Équation cartésienne d'un plan

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.

1. Si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul alors tout plan qui a pour vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel.
2. Réciproquement, si a, b, c et d sont des réels avec a, b, c non tous nuls, alors l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ s'appelle une **équation cartésienne** de plan.