Loi des grands nombres — Sujets de bac

Métropole Juin 2024 (Secours) – Jour 1

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à $0,25$ la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.
On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par $T_1,\ T_2,\ T_3$ les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.
On suppose que $T_1,\ T_2,\ T_3$ sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.
On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de $T_1,\ T_2$ et T_3.
2. (a) Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à $0,81$.

Métropole Juin 2024 – Jour 2

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ».

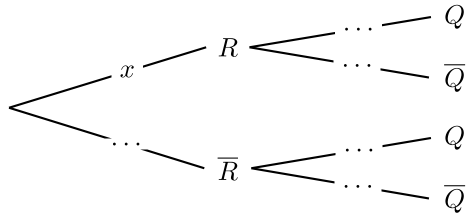
Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que $91,7\,\%$ des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

— $65\,\%$ des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
— $98\,\%$ des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Montrer que $x = 0,9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
   La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que $65\,\%$ des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
   Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins $80\,\%$ ».

Métropole Juin 2024 (dévoilé) – Jour 2

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.
Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

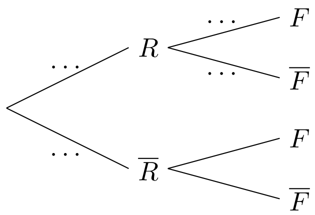
Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1. (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.

   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.
   Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.
   Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.
   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1000 clients répondent.

Loi des grands nombres — Sujets de bac

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients.
On admet que son espérance $E\left(Y_1\right)$ est égale à 30000 et que sa variance $V\left(Y_1\right)$ est égale à 100000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E\left(X_2\right)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
   Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à $53,5$ et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,72275.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre $51,7$ euros et $55,3$ euros est supérieure à $0,75$.