Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1
On lance 3600 fois une pièce de monnaie non truquée. On note X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de « Pile » obtenus.

1. Soit $\delta > 0$. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X.
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de « Pile » soit strictement compris entre 1600 et 2000.

Exercice 2
Une usine fabrique des tubes dont l'épaisseur en millimètres définit une variable aléatoire X d'espérance $1,5$mm et d'écart-type $0,07$mm.

1. Justifier, à l'aire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $P(|X - 1,5| \geqslant 0,15) < 0,22$.
2. En déduire que $P(1,35 < X < 1,65) > 0,78$.

Exercice 3
On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	1	4	10
$P(X = x_i) =$	$0,6$	$0,3$	$0,1$

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer $P(|X - E(X)| \geqslant 2)$.
3. (a) Soit $\delta > 0$. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X.
   (b) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta = 2$ et comparer le résultat à celui obtenu à la question précédente.

Exercice 4
Au basket, lorsqu'elle tente un lancer franc, Claire marque le panier dans 70% des cas. À l'entraînement sur une série de 100 lancers indépendants, on note X le nombre de paniers réussis par Claire.

1. (a) Donner la loi de probabilité de la variable X.
   (b) Déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, établir que $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0,25$.
2. On écrit un programme en langage Python afin de simuler un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

```
import random

def distance():
    e = 70
    x = 0
    for k in range(100):
        a = random.random()
        if a<=0.7:
            x = x + 1
    d = abs(x-e)
    return d

def echantillon(n):
    s = 4.58
    y = 0
    for j in range(n):
        if distance()>= 2 * s:
            y = y + 1
    p = y/n
    return p
```

   Interpréter le résultat renvoyé par
   (a) la fonction `distance`
   (b) la fonction `echantillon`
3. En exécutant trois fois la fonction `echantillon`, on a obtenu les valeurs `0.038`, `0.043` et `0.048`. Comparer au résultat obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Inégalité de concentration

Exercice 5
On lance 1000 fois de suite et de manière indépendante une pièce bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui à un lancer associe 1 si la pièce tombe sur Pile et 0 sinon.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. On note M la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 1000 de X. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $P(|M - 0,5| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{0,00025}{\delta^2}$.
3. Montrer que l'événement « La fréquence de Pile est strictement comprise entre $0,45$ et $0,55$ » a une probabilité supérieure à $0,9$.

Exercice 6
On lance n fois un dé bien équilibré à six faces. On note X la variable aléatoire qui, à un lancer donné, associe 1 si le numéro 4 sort et 0 sinon. On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit $\delta > 0$. Écrire l'inégalité de concentration relative à la variable M_n.
3. Combien suffit-il d'effectuer de lancers pour que la fréquence de sortie du numéro 4 s'écarte de plus de $\dfrac{1}{100}$ de la valeur $\dfrac{1}{6}$ avec une probabilité inférieure ou égale à $0,95$?

Exercice 7
On effectue n tirages avec remise d'une carte dans un jeu de 52 cartes. Pour le i-ème tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la carte est un pique et 0 sinon.

1. Montrer que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X dont on donner l'espérance et la variance.
2. Quelle valeur de n peut-on choisir pour être sûr que la probabilité que le nombre moyen de piques piochés s'écarte de l'espérance de plus de $0,1$ soit inférieure à $0,05$?

Exercice 8
Le nombre de buts marqués par match par l'attaquant vedette d'une équipe de football est donné par la variable aléatoire B qui suit la loi suivante :

b_i	0	1	2	3
$P(B = b_i)$	$0,2$	$0,4$	$0,3$	$0,1$

1. Calculer $E(B)$ et $V(B)$.
2. On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de B.
   (a) Écrire l'inégalité de concentration pour la variable M_n.
   (b) En déduire que $P(1 < M_n < 1,6) \geqslant 1 - \dfrac{9}{n}$.
   (c) Combien l'attaquant doit-il avoir joué de matchs pour qu'il ait marqué en moyenne plus d'un but par match, avec une probabilité d'au moins 90% ?

Loi des grands nombres

Exercice 9

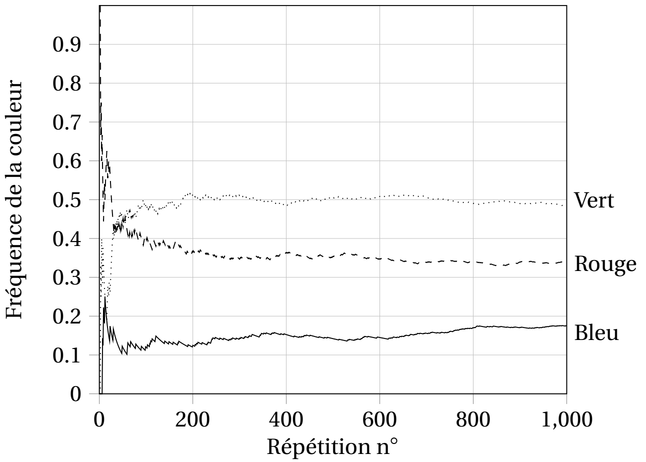
On considère un jeu dont le gain algébrique en euros est donné par la variable aléatoire G de loi suivante :

g_i	-2	-1	0	10
$P(G = g_i)$	$0,33$	$0,44$	$0,22$	$0,01$

De quelle valeur va se rapprocher la moyenne des gains d'un nombre important de joueurs jouant de manière indépendante ? Justifier.

Exercice 10

Dans un urne, il y a des boules rouges, des boules bleues et des boules vertes indiscernables au toucher. On réalise 1000 fois l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une boule dans l'urne, noter sa couleur et la remettre dans l'urne. L'évolution des fréquences des boules obtenues de chaque couleur au fil de ces 1000 répétitions est donnée ci-dessous :



On note p la probabilité d'obtenir une boule rouge et on note X la variable aléatoire qui, au résultat d'un tirage, associe 1 si on a pioché une boule rouge et 0 sinon. On note M_n la variable aléatoire moyenne d'une échantillon de taille n de la loi de X.

1. Donner $E(X)$ puis écrire la loi des grands nombres en fonction de M_n et p.
2. À l'aide du graphique, estimer la valeur de p en justifiant.
3. Sachant qu'il y a 50 boules au total dans l'urne, estimer le nombre de boules rouges puis le nombre de boules vertes et bleues.

Exercice 11

On considère une urne contenant dix boules dont exactement 4 sont rouges. On tire successivement et avec remise une boule de l'urne et on s'arrête dès que l'ont obtient une première boule rouge. L'objectif est de conjecturer l'espérance de cette loi à l'aide du programme informatique suivant :

```
import random

def rang(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        X = random.randint(1,10)
        C = 1
        while X <= .... :
            X = random.randint(1,10)
            C = ....
        S = S + C
    return S
```

1. Reproduire et compléter le programme ci-dessus afin qu'il simule cette expérience.
2. Quel est le rôle de la variable `S` ?
3. Tester le programme pour de grandes valeurs de `n`. Quelle semble être l'espérance de cette loi ? Justifier en citant le théorème utilisé.