Loi des grands nombres

I Inégalités probabilistes

1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème I.1

Soit X un variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Pour tout nombre réel $\delta > 0$,

$$P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Remarque — Autrement dit, $P(X \notin]\mu-\delta;\mu+\delta[) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$. On voit donc que plus la variance est petite et plus on a de chance d'être proche de l'espérance.

Exemple I.1 — On lance 100 fois une pièce de monnaie bien équilibrée et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « Pile ». Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$.

1. Que valent l'espérance et la variance de X ?
2. En déduire que $P(|X-50| \geqslant 10) \leqslant 0,25$ et interpréter le résultat.
3. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(41 \leqslant X \leqslant 59)$ et en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(|X-50| \geqslant 10)$.
4. Quel constat peut-on faire ?

2. L'inégalité de concentration

Proposition I.2

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de la loi de probabilité de X, c'est-à-dire $M_n = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ où les X_i sont indépendantes et toutes de même loi de probabilité que X. Alors, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|M_n-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.2 — On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge et 0 sinon. On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit $\delta > 0$. Écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.
3. À partir de combien de tirages peut-on garantir à plus de 99% que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre $0,35$ et $0,45$? → À rédiger

II Loi des grands nombres

Théorème II.1

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de la loi de probabilité de X. Alors, pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$$

Démonstration. → À rédiger

Remarque — Autrement dit, l'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Exemple II.1 — Une punaise possède une probabilité p de tomber sur sa pointe lorsqu'on la lance. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si la punaise tombe sur la pointe et 0 si elle tombe sur la tête. On lance n fois de suite et de manière indépendante cette punaise et on note M_n la variable aléatoire moyenne d'une échantillon de la loi de probabilité de X.

1. Déterminer $E(X)$.
2. Écrire la loi des grands nombres dans le cas de la punaise.
3. Expliquer alors comment on peut estimer la probabilité p que la punaise retombe sur sa pointe. → À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $E(X) = np = 100 \times 0,5 = 50$ et $V(X) = np(1-p) = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25$.
2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée avec $\delta = 10$, on a :
   $P(|X-50| \geqslant 10) \leqslant \dfrac{25}{10^2}$ c'est-à-dire $P(|X-50|) \leqslant 0,25$
3. $P(41 \leqslant X \leqslant 59) = P(X \leqslant 59) - P(X \leqslant 40) \approx 0,972 - 0,029 = 0,943$
   On en déduit que
   $P(|X-50| \geqslant 10) = 1 - P(41 \leqslant X \leqslant 59) = 1 - 0,943 = 0,057.$
4. On peut constater que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale.

Exemple I.2

1. X est une variable de Bernoulli de paramètre $p = 2/5 = 0,4$ donc $E(X) = 0,4$ et $V(X) = p(1-p) = 0,4 * 0,6 = 0,24$.
2.
3. On cherche n tel que $P(0,35 < M_n < 0,45) > 0,99$ c'est-à-dire tel que
   $P(|M_n - 0,4| < 0,05) > 0,99 \iff 1 - P(|M_n - 0,4| \geqslant 0,05) > 0,99 \iff P(|M_n - 0,4| \geqslant 0,05) < 0,01$.
   D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_n - 0,4| \geqslant 0,05) \leqslant \dfrac{0,24}{n \times 0,05^2}$ c'est-à-dire $P(|M_n - 0,4| \geqslant 0,05) \leqslant \dfrac{60000}{n}$.
   Pour que l'inégalité $P(|M_n - 0,4| \geqslant 0,05) < 0,01$ soit vérifiée, il suffit que $\dfrac{60000}{n} < 0,01$ qui est équivalente à $\dfrac{60000}{0,01} < n \iff 6\,000\,000 < n$.
   À partir $6\,000\,001$, on est sûr qu'on aura $P(0,35 < M_n < 0,45) > 0,99$.

Théorème II.1

D'après l'inégalité de concentration, on a

$$P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Puisqu'une probabilité est toujours positive, on a même :

$$0 \leqslant P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{V}{n\delta^2} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$.

Exemple II.1

1. $E(X) = p$.
2. Pour tout $\delta > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - p| \geqslant \delta) = 0$.
3. Si on lance un grand nombre de fois la punaise, la variable aléatoire M_n va se « rapprocher » de p. Pour estimer p, il suffit donc de faire un grand nombe de lancer et de calculer la fréquence du nombre de fois où la punaise tombe sur sa pointe.

Loi des grands nombres

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître et savoir écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Connaître et savoir écrire l'inégalité de concentration.
- Savoir appliquer l'inégalité de concentration pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi
- Connaître la loi des grands nombres.

Loi des grands nombres

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître et savoir écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Connaître et savoir écrire l'inégalité de concentration.
- Savoir appliquer l'inégalité de concentration pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi
- Connaître la loi des grands nombres.

Loi des grands nombres

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître et savoir écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Connaître et savoir écrire l'inégalité de concentration.
- Savoir appliquer l'inégalité de concentration pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi
- Connaître la loi des grands nombres.