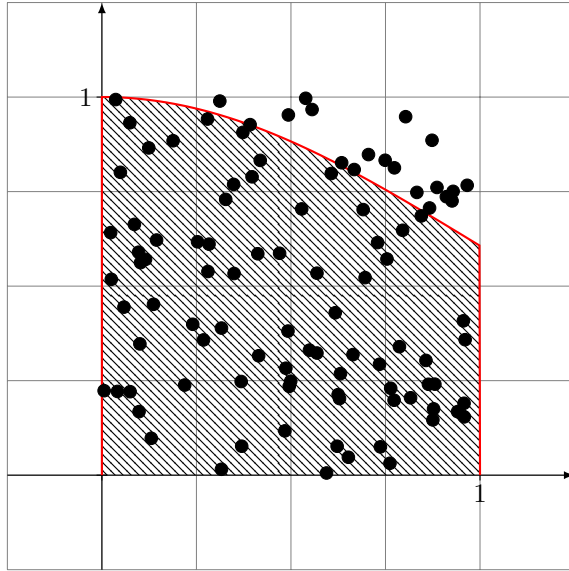


Méthodes de Monte-Carlo et calcul approché de π par le hasard

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes probabilistes basées sur l'observation d'un grand nombre d'issues. Elles permettent, par le calcul de probabilités, de déterminer des aires.

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = e^{-x^2/2}$. On admet qu'elle est telle que

$0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0; 1]$. On note $A = \int_0^1 f(x) dx$.



On considère l'épreuve de Bernoulli qui consiste à choisir au hasard un point $(x; y)$ dans le carré de côté 1. On appelle succès l'événement « Le point choisi est sous la courbe représentative de f ». On admet que la probabilité de cet événement est :

$$p = \frac{\text{aire sous la courbe}}{\text{aire du carré}} = \frac{A}{1} = A$$

On note X la variable aléatoire qui, à chaque choix aléatoire d'un point, associe 1 si le point est sous la courbe et 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de X . Justifier que M_n tend « en probabilité » vers A , c'est-à-dire que pour tout réel $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - A| \geq \delta) = 0.$$
3. Compléter la fonction `epreuve` afin qu'elle renvoie la valeur 1 si un point de coordonnées $(x; y)$ est sous la courbe et 0 sinon.

```
import math

def f(x):
    return math.exp(-x**2/2)

def epreuve(x,y):
    if ..... :
        return ....
    else:
        return .....
```

4. (a) Compléter la fonction `aire` ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de l'aire A . On pourra réutiliser la fonction `epreuve` précédente.

```
import random

def aire(n):
    M = 0
    for k in range(.....):
        x = random.random()
        y = random.random()
        M = M + ....
    return .....
```

- (a) Exécuter ce programme pour de grandes valeurs de n . A combien peut-on estimer le nombre $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$?
5. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. On admet que la courbe représentative de la fonction g est un quart de cercle.
 - (a) Justifier graphiquement que $\int_0^1 g(x) dx = \frac{\pi}{4}$.
 - (b) En adaptant les programmes précédents, déterminer une valeur approchée de π .