Fonctions sinus et cosinus

I Équations et inéquations trigonométriques

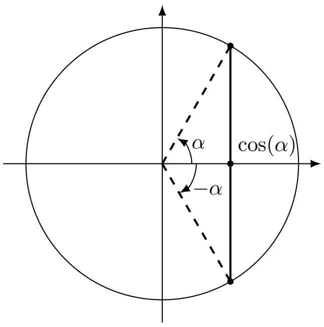
1. Rappel des valeurs remarquables du cosinus et du sinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0

2. Équation $\cos(x) = a$

Proposition I.1

Soit α un nombre réel.
$\cos(x) = \cos(\alpha) \iff x = \alpha + k \times 2\pi$ ou $x = -\alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)



Remarque — Pour résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, on essaiera donc au préalable d'écrire a sous la forme $a = \cos(\alpha)$.

Exemple I.1 — Résoudre les équations suivantes dans $[-\pi; \pi]$:

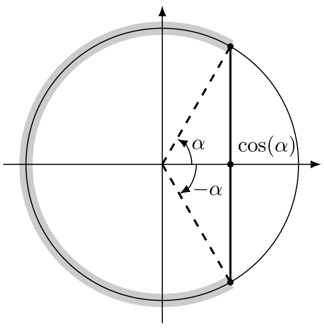
1. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

→ À rédiger

3. Inéquation $\cos(x) \leqslant a$

Proposition I.2

Soit α un nombre réel.
Pour résoudre une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant \cos(\alpha)$, on repère tous les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est inférieure ou égale à $\cos(\alpha)$.



Exemple I.2 — Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi; \pi]$:

1. $\cos(x) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
2. $\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

→ À rédiger

II Étude des fonctions sinus et cosinus

1. Fonction sinus

Proposition II.1

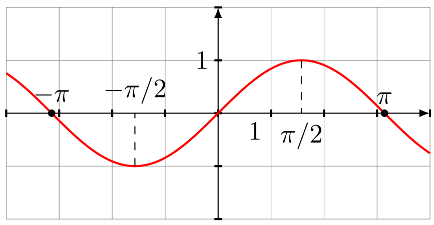
- La fonction sinus est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
- La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.

Remarque —

- Comme elle est 2π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
- Comme elle est impaire, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine et il suffit donc de l'étudier sur $[0; \pi]$.

Proposition II.2

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Exemple II.1 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin(2x)$.

1. Montrer que f est π-périodique.
2. Montrer que f est impaire.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$ puis sur $[-\pi; \pi]$.

$\longrightarrow$ À rédiger

2. Fonction cosinus

Proposition II.3

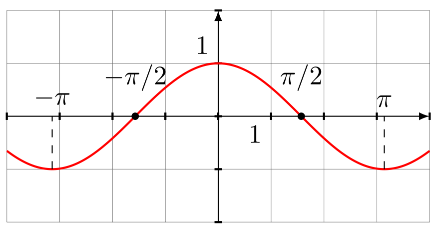
- La fonction cosinus est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+2\pi) = \cos(x)$.
- La fonction cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.

Remarque —

- Comme elle est 2π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
- Comme elle est paire, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et il suffit donc de l'étudier sur $[0; \pi]$.

Proposition II.4

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$			$+$		0		$-$		
$\cos$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



Exemple II.2 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \cos(2x)$.

1. Montrer que f est π-périodique.
2. Montrer que f est paire.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$ puis sur $[-\pi; \pi]$.

$\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \iff x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{-\pi}{3}$
2. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{-\pi}{4}$

Exemple I.2

1. $S = \left[-\pi; \frac{-\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$
2. $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$
   Ainsi, $S = \left[-\pi; \frac{-\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$

Exemple II.1

1. Pour tout réel x, $f(x+\pi) = 3\sin(2(x+\pi)) = 2\sin(2x+2\pi) = 2\sin(2x) = f(x)$.
   Ainsi, f est π-périodique.
2. Pour tout réel x, $f(-x) = 3\sin(2 \times (-x)) = 3\sin(-2x) = -3\sin(2x) = -f(x)$.
   Ainsi, f est impaire.
3. Pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times (2\cos(2x)) = 6\cos(2x)$.
   Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ alors $0 \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et donc $0 \leqslant \cos(2x)$.
   Si $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$ alors $\frac{\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ et donc $\cos(2x) \leqslant 0$.
   Si $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$ alors $\frac{3\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant 2\pi$ et donc $0 \leqslant \cos(2x)$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
6				$+$			
$\cos(2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

   Puisque f est impaire, on a le tableau de variations suivant sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Exemple II.2

1. Pour tout réel x, $f(x+\pi) = 1 + \cos(2(x+\pi)) = 1 + \cos(2x+2\pi) = 1 + \cos(2x) = f(x)$.
   Ainsi, f est π-périodique.
2. Pour tout réel x, $f(-x) = 1 + \cos(2 \times (-x)) = 1 + \cos(-2x) = 1 + \cos(2x) = f(x)$.
   Ainsi, f est paire.
3. Pour tout réel x, $f'(x) = -2\sin(2x)$.
   Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors $0 \leqslant 2x \leqslant \pi$ et donc $0 \leqslant \sin(2x)$.
   Si $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ alors $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$ et donc $\sin(2x) \leqslant 0$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
-2			$-$		
$\sin(2x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

   Puisque la fonction est paire, on a le tableau de variations suivant sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
f	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Fonctions sinus et cosinus

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir résoudre une équation du type $\cos(x) = a$
- Savoir résoudre une inéquation du type $\cos(x) \leqslant a$
- Connaître les propriétés des fonctions sinus et cosinus ainsi que leur sens de variation
- Savoir étudier une fonction trigonométrique (parité, périodicité, dérivée,...)

Fonctions sinus et cosinus

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir résoudre une équation du type $\cos(x) = a$
- Savoir résoudre une inéquation du type $\cos(x) \leqslant a$
- Connaître les propriétés des fonctions sinus et cosinus ainsi que leur sens de variation
- Savoir étudier une fonction trigonométrique (parité, périodicité, dérivée,...)

Fonctions sinus et cosinus

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir résoudre une équation du type $\cos(x) = a$
- Savoir résoudre une inéquation du type $\cos(x) \leqslant a$
- Connaître les propriétés des fonctions sinus et cosinus ainsi que leur sens de variation
- Savoir étudier une fonction trigonométrique (parité, périodicité, dérivée,...)