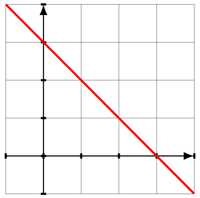
## Intégrale d'une fonction positive

**Exercice 1**

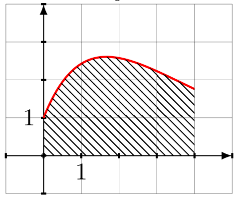
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction $f$.



1. Hachurer le domaine du plan délimité par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

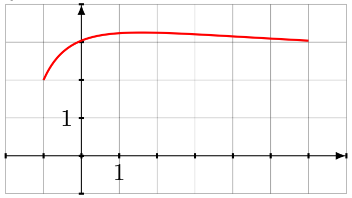
**Exercice 2**

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction $f$ sur l'intervalle $[0;4]$. Donner une estimation de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, en unités d'aire.




**Exercice 3**

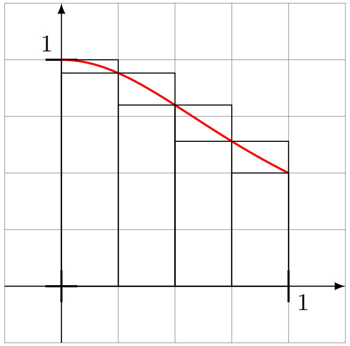
Soit $f$ la fonction définie sur $[-1;6]$ dont la courbe représentative est donnée dans le repère orthonormé ci-dessous.




1. Donner le signe de $f$ sur $[-1;6]$ puis interpréter graphiquement $\displaystyle\int_{-1}^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-1}^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ par deux nombres entiers.
3. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ par deux nombres entiers consécutifs.

**Exercice 4**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On note $A$ l'aire du domaine délimité par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.




On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en $4$ intervalles d'amplitude $\dfrac{1}{4}$. On note $A_1$ la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et $A_2$ la somme des aires des rectangles « au-dessus de la courbe ».

1. Calculer $A_1$ et $A_2$.
2. En déduire un encadrement de $A$.
3. Compléter la fonction `rectangle` écrite en langage Python pour qu'elle renvoie les aires $A_1$ et $A_2$ obtenues pour une subdivision de l'intervalle $[0;1]$ en $n$ intervalles.

```
def f(x):
    return 1/(1+x**2)

def rectangle(n):
    x = 0
    A1 = 0
    A2 = 0
    for k in range(....., .....):
        y1 =
        y1 =
        A1 = y1 * .....
        A2 = .......
        x = ......
    return [A1, A2]
```

**Exercice 5**

Donner la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur $I$ :

1. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$ sur $I = [0;+\infty[$
2. $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-3}^x \mathrm{e}^{2t+4}\,\mathrm{d}t$ sur $I = [3;+\infty[$

**Exercice 6**

1. Déterminer l'unique primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$ valant $0$ en $1$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 7**

Dans un repère orthonormé, déterminer la valeur exacte de l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction exponentielle, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

## Calculs d'intégrales

**Exercice 8**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-2}^2 3x^2 + x - 4\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x) - \cos(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t$ 4. $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \cos(2u)\,\mathrm{d}u$

**Exercice 9**

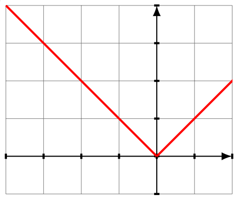
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 1 - \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_{1/2}^2 -u + \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ 3. $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^2 3 + \frac{1}{\sqrt{t+5}}\,\mathrm{d}t$

## Propriétés de l'intégrale

**Exercice 10**

Soit $f$ la fonction valeur absolue dont on donne ci-dessous la représentation graphique.



Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 11**

1. Calculer $\displaystyle\int_{2}^{4} x-2\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} (-x+2)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{4} |x-2|\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 12**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $[-2;4]$ telles que $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-3$ et $\displaystyle\int_{-2}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x=5$. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I=\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x$ 2. $J=\displaystyle\int_{-2}^{4} 4f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $K=\displaystyle\int_{-2}^{4} 3f(x)-2g(x)\,\mathrm{d}x$

**Exercice 13**

Soit $I=\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I$.
2. Calculer $I+J$.
3. En déduire la valeur de $J$.

**Exercice 14**

Soit $I=\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I+J$ et $I-J$ (on rappelle que $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos(2x)$).
2. En déduire les valeurs exactes de $I$ et de $J$.

**Exercice 15**

Sans faire aucun calcul, indiquer, en justifiant, le signe des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_{1}^{2} -2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

**Exercice 16**

Voici le tableau de variations d'une fonction $f$ sur $[-4;5]$.

| $x$ | $-4$ | $-1$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $3$ ↘ | $2$ ↗ | $5$ ↘ | $-1$ ↗ | $3$ |

Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ et de $\displaystyle\int_{3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 17**

1. Montrer que pour tout $x\in[0;1]$, $0\leqslant x\mathrm{e}^{-x}\leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. En déduire que $0\leqslant\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

## Intégration par parties

**Exercice 18**

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^{3} (t+2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_{0}^{2} (3x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} (2t+1)\ln(t)\,\mathrm{d}t$

**Exercice 19**

Soit $I=\displaystyle\int_{1}^{9} x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I=121-\dfrac{1}{4}I$.
2. En déduire la valeur exacte de $I$.

**Exercice 20**

On pose $I=\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1. A l'aide d'une première intégration par parties, montrer que $J=\mathrm{e}-2I$.
2. Calculer $I$ à l'aide d'une deuxième intégration par parties.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $J$.

## Valeur moyenne

**Exercice 21**

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f$ définie par $f(x)=3\mathrm{e}^x+2$ sur l'intervalle $[0;1]$.

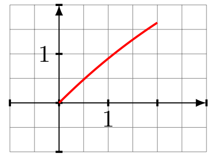
**Exercice 22**

Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, $t$ jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction $f$ définie sur $[0;6]$ par $f(t)=6t^2-t^3$.

1. Calculer la valeur moyenne $m$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;6]$.
2. Donner une interprétation de ce résultat.

**Exercice 23**

Pour tout réel $x$, on définit $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{-x}{10}}$. La courbe de $f$ est représentée ci-dessous :




A l'aide du graphique, donner un encadrement de la valeur moyenne $m$ de $f$ sur $[0;2]$.

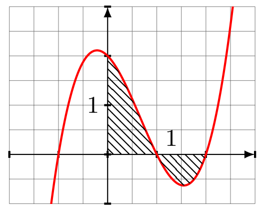
**Exercice 24**

On sait que la valeur moyenne d'une fonction $g$ sur l'intervalle $[-1;3]$ est de $4$. Déterminer $\displaystyle\int_{-1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$.

## Aire sous une courbe

**Exercice 25**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2-x+2$. On a tracé ci-dessous la courbe de $f$ dans un repère orthonormé d'unité $0,8$cm.




1. Montrer que pour tout réel $x$, $f(x)=(x^2-1)(x-2)$.
2. Calculer l'aire de la partie hachurée en unités d'aire puis en centimètres carrés.

**Exercice 26**

Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^3$. Préciser la position relative des courbes de $f$ et de $g$ sur l'intervalle $[0;1]$ puis calculer l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par les courbes de $f$ et de $g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

**Exercice 27**

Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $g(x)=x+1$.

1. Déterminer la position relative des courbes de $f$ et de $g$. On pourra étudier la fonction $h$ définie par $h(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.
2. Calculer l'aire située entre les courbes de $f$ et de $g$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.