Calcul intégral

I Intégrale d'une fonction positive

1. Définition d'une intégrale

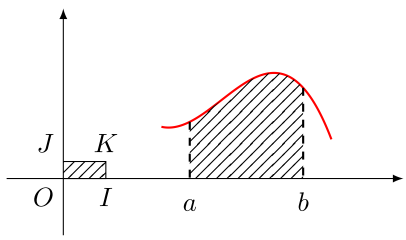
Si (O, I, J) est un repère orthogonal, on appelle **unité d'aire** (ou u.a.) l'aire du rectangle $OIKJ$ où $K(1;1)$.

Définition I.1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$. L'**intégrale** de a à b de f est l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine compris entre :

- la courbe $\mathcal{C}$ de f
- l'axe des abscisses
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale de a à b de f se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou aussi $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

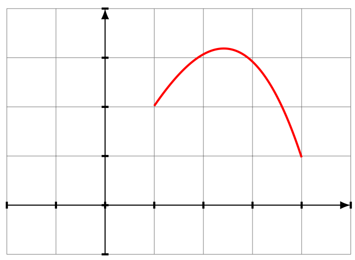


Exemple I.1 —

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur $[2;5]$ par $f(x) = 4$ dans un repère de 3 cm par unité en abscisse et de 2 cm par unité en ordonnée.
2. Calculer, en unités d'aire, l'intégrale de 2 à 5 de f.
3. Que vaut cette intégrale en cm^2 ? → À rédiger

Exemple I.2 — On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f continue et positive sur $[1;4]$.

1. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ entre deux entiers.
2. Estimer plus précisément $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. → À rédiger



2. Théorème fondamental

Théorème I.2

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$. La fonction F_a définie sur $[a,b]$ par

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. (uniquement pour une fonction positive et croissante) → À rédiger

Exemple I.3 — Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. → À rédiger

Corollaire I.3

Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
Ce nombre se note aussi $[F(t)]_a^b$.

Exemple I.4 — Calculer $\displaystyle\int_{-1}^3 x^2\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. → À rédiger

II Intégrale d'une fonction de signe quelconque

1. Définition générale de l'intégrale

Théorème II.1

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.

Définition II.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I. Soit a et b deux réels de l'intervalle I.

On définit l'intégrale de a à b de f par $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Exemple II.1 — Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_{-4}^{3} x^3 - x\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 -5\mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x$. → À rédiger

2. Propriétés de l'intégrale

Proposition II.3 (Relation de Chasles)

Pour tous réels a, b et c dans I, $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple II.2 — Soit f définie sur $[-2; 1]$ par $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2 - x^2 \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$. Déterminer $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. → À rédiger

Proposition II.4 (Linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Soit k un réel.

- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b k \times f(x)\,\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple II.3 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Montrer que F définie par $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 (3x-2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. → À rédiger

Proposition II.5 (Positivité)

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple II.4 — 1. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^x$.

2. En déduire que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} - 1$. → À rédiger

3. Intégration par parties

Théorème II.6

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées sont continues sur I.

Pour tous réels a et b, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple II.5 — Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. → À rédiger

III Application des intégrales

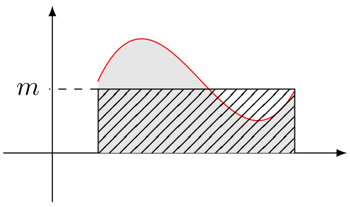
1. Valeur moyenne d'une fonction

Définition III.1

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. La **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ est le nombre

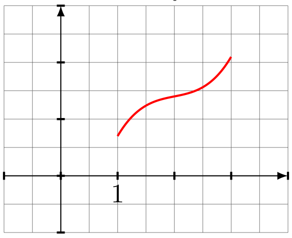
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

La valeur moyenne est la hauteur du rectangle de base $b-a$ ayant la même aire que celle sous la courbe de f.



Exemple III.1 — Déterminer la valeur moyenne de la fonction carré sur l'intervalle $[0;3]$. → À rédiger

Exemple III.2 — La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle $[1;3]$.



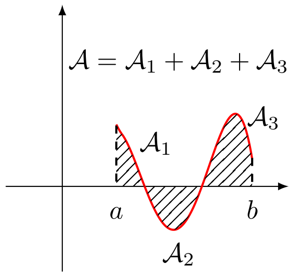
Estimer la valeur moyenne de f sur $[1;3]$ à partir du graphique. → À rédiger

2. Aire sous une courbe

Proposition III.2

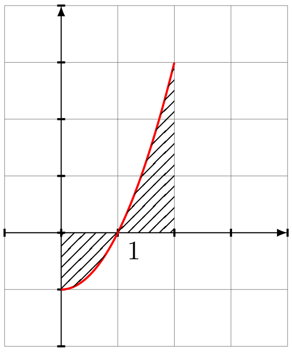
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

- Si f est positive sur $[a,b]$, $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est négative sur $[a,b]$, $\mathcal{A} = -\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est de signe quelconque sur $[a,b]$, on décompose la courbe selon que la fonction est positive ou négative.



Exemple III.3 — On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^2 - 1$.

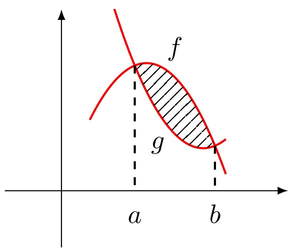
1. Étudier le signe de f sur $[0;2]$.
2. Déterminer la valeur de l'aire hachurée sur le schéma. → À rédiger



Proposition III.3

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan délimité par les courbes de f, de g et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$$

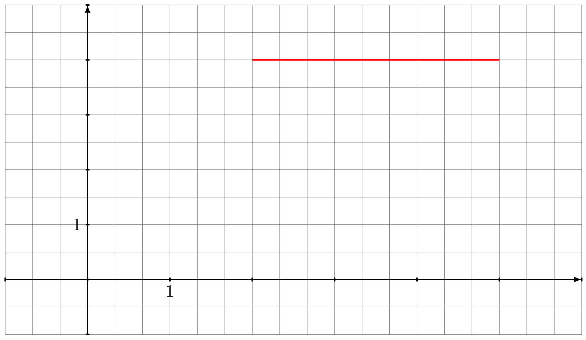


Exemple III.4 — Soit f et g les fonctions définies sur $[0;1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Déterminer l'aire du domaine délimité par les courbes de f et de g, et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. → À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. On a la représentation graphique suivante :



2. On cherche l'aire d'un rectangle de longueur $5-2=3$ unités et de largeur 4 unités. Ainsi,
$$\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 3\times 4 = 12 \text{ u.a.}$$
3. 1 u.a. $= 3$ cm $\times$ 2 cm $=$ 6cm^2. Ainsi,
$$\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 3\times 4 = 12 \text{ u.a.} = 12\times 6 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$$

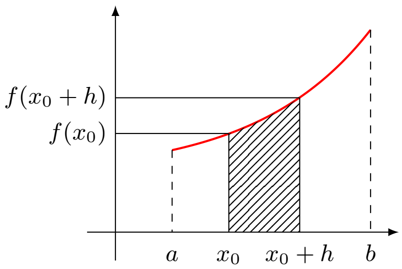
Exemple I.2

1. $3\times 1 \leqslant \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3\times 4$ donc $3 \leqslant \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 12$
2. Par exemple, $7 \leqslant \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 8$

Théorème I.2

On démontre ce résultat uniquement dans le cas où la fonction f est en plus croissante sur $[a,b]$.
Soit $x_0\in[a,b]$ et h un réel non nul. Montrons que F_a est dérivable en x_0 et que $F_a'(x_0)=f(x_0)$. Pour cela, on calcule le taux d'accroissement de F_a entre x_0 et x_0+h.

- 1er cas : $h>0$. Dans ce cas, on a la figure suivante :



  Puisque $F_a(x_0)$ est l'aire située sous la courbe entre a et x_0 et que $F_a(x_0+h)$ est l'aire située sous la courbe entre a et x_0+h alors $F_a(x_0+h)-F(x_0)$ est l'aire hachurée sur le schéma, c'est-à-dire $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x$.
  Puisque f est croissante sur $[a,b]$, on voit graphiquement que l'aire hachurée est comprise entre l'aire d'un rectangle de longueur h et de hauteur $f(x_0)$, c'est-à-dire $f(x_0)\times h$ et l'aire d'un rectangle de longueur h et de hauteur $f(x_0+h)$, c'est-à-dire $f(x_0+h)\times h$. Ainsi,
  $f(x_0)\times h \leqslant F_a(x_0+h)-F(x_0) \leqslant f(x_0+h)\times h$
  En divisant chaque membre par $h>0$, on obtient :
  $f(x_0) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$
  Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0+h)=f(x_0)$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{F_a(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.
- 2ème cas : $h<0$. On peut montrer alors que
  $f(x_0+h)\times h \leqslant F_a(x_0+h)-F(x_0) \leqslant f(x_0)\times h$
  En divisant chaque membre par $h<0$, on obtient :
  $f(x_0) \geqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F(x_0)}{h} \geqslant f(x_0+h)$
  Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{h\to 0^-} f(x_0+h)=f(x_0)$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{F_a(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

Au final, nous voyons que le taux d'accroissement $\dfrac{F_a(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ tend vers $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0. Cela signifie que F_a est dérivable en x_0 et que $F_a'(x_0)=f(x_0)$.

Exemple I.3

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
D'après le théorème précédent, pour tout réel x, $F'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ donc $F'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple I.4

$\int_{-1}^3 x^2\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^3 = \dfrac{1}{3}\times 3^3-\dfrac{1}{3}\times(-1)^3 = \dfrac{27}{3}-\dfrac{-1}{3} = \dfrac{28}{3}$

$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}-1$

Exemple II.1

$I = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^3 = \left(\frac{1}{4}3^4-\frac{1}{2}3^2\right) - \left(\frac{1}{4}(-4)^4-\frac{1}{2}(-4)^2\right) = \frac{63}{4}-\frac{224}{4} = \frac{-161}{4}$
$J = \left[\mathrm{e}^{-5x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-5\times 1}-\mathrm{e}^{-5\times 0} = \mathrm{e}^{-5}-1$

Exemple II.2

D'une part,
$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-2}^0 x+2\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^0\\ &= \left(\frac{1}{2}\times 0^2+2\times 0\right)-\left(\frac{1}{2}\times(-2)^2+2\times(-2)\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 2-x^2\mathrm{d}x\\ &= \left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\\ &= \left(2\times 1-\frac{1}{3}\times 1^3\right)-\left(2\times 0-\frac{1}{3}\times 0^3\right)\\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$
Ainsi, $\int_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2+\dfrac{5}{3} = \dfrac{11}{3}$.

Exemple II.3

1. Pour tout réel x,
   $F'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1) \times \mathrm{e}^x = (1+(x-1))\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x = f(x)$
   Ainsi, F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3x-2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= 3\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\ &= 3 \times [(x-1)\mathrm{e}^x]_0^1 - 2 \times [\mathrm{e}^x]_0^1 \\ &= 3 \times \left((1-1)\mathrm{e}^1 - (0-1)\mathrm{e}^0\right) \\ &- 2\left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) \\ &= 3 \times 1 - 2 \times (\mathrm{e}-1) \\ &= -2\mathrm{e} + 5\end{aligned}$$

Exemple II.4

1. On sait que pour tout réel $x \in [0;1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant x$.
   Comme la fonction exponentielle est croissante sur $[0;1]$ alors $\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^x$. Ainsi, $1 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^x$.
2. Par positivité de l'intégrale,
   $\int_0^1 1\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
   Or, $\int_0^1 1\mathrm{d}x = 1$ et $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$ d'où
   $1 \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} - 1$

Théorème II.6

Pour tous $x \in I$, $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Ainsi,
$\int_a^b (u(x)v(x))'\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\mathrm{d}x$
Par linéarité,
$\int_a^b (u(x)v(x))'\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$
Comme uv est une primitive de $(uv)'$, alors
$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$
Par suite,
$[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

Exemple II.5

$u = x$ $u' = 1$
$v = \mathrm{e}^x$ $v' = \mathrm{e}^x$
Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\ &= 1 \times \mathrm{e}^1 - 0 \times \mathrm{e}^0 - [\mathrm{e}^x]_0^1 \\ &= \mathrm{e}^1 - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple III.1

$m = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \times 3^3 - \frac{1}{3} \times 0^3\right) = 3$

Exemple III.2

Graphiquement, on peut estimer que $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \approx 3,25$ donc la valeur moyenne de f sur $[1;3]$ est approximativement
$m = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2} \times 3,25 = 1,625$

Exemple III.3

1. Le trinôme $x^2 - 1$ possède deux racines 1 et -1 donc son tableau de signes sur $\mathbb{R}$ est

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit que f est négative sur $[0;1]$ et positive sur $[1;2]$.

2. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 = \frac{-2}{3}$
   $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$
   Ainsi, l'aire hachurée est :
   $\mathcal{A} = -\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{-2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

Exemple III.4

Pour tout réel $x \in [0;1]$, $x^2 \leqslant x$. Ainsi, l'aire du domaine cherchée est :
$\mathcal{A} = \int_0^1 x - x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{3} \times 1^3\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0^2 - \frac{1}{3} \times 0^3\right) = \frac{1}{6}$

Calcul intégral

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir estimer graphiquement ou encadrer une intégrale
- Savoir estimer graphiquement une valeur moyenne
- Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- Savoir utiliser la linéarité de l'intégrale
- Savoir utiliser la positivité pour encadrer une intégrale à partir d'un encadrement de la fonction
- Savoir calculer l'aire entre deux courbes
- Savoir étudier une suite d'intégrales

Calcul intégral

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir estimer graphiquement ou encadrer une intégrale
- Savoir estimer graphiquement une valeur moyenne
- Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- Savoir utiliser la linéarité de l'intégrale
- Savoir utiliser la positivité pour encadrer une intégrale à partir d'un encadrement de la fonction
- Savoir calculer l'aire entre deux courbes
- Savoir étudier une suite d'intégrales

Calcul intégral

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir estimer graphiquement ou encadrer une intégrale
- Savoir estimer graphiquement une valeur moyenne
- Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- Savoir utiliser la linéarité de l'intégrale
- Savoir utiliser la positivité pour encadrer une intégrale à partir d'un encadrement de la fonction
- Savoir calculer l'aire entre deux courbes
- Savoir étudier une suite d'intégrales