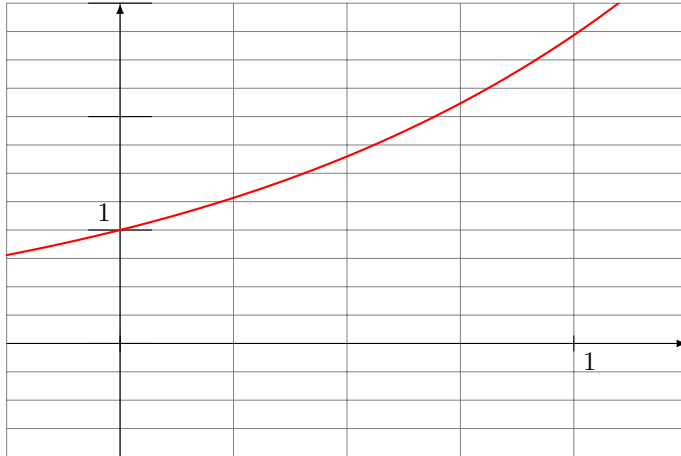


La méthode des rectangles

Dans un repère orthogonal d'origine O , on considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^x$. On souhaite déterminer la valeur de l'aire A de la surface située sous la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On partage l'intervalle $[0; 1]$ en quatre intervalles de même amplitude.



1. Tracer en rouge sur chacun des intervalles $[0; 1/4]$, $[1/4; 2/4]$, $[2/4; 3/4]$ et $[3/4; 1]$ les rectangles R_1 , R_2 , R_3 et R_4 de hauteurs respectives $f(0)$, $f(1/4)$, $f(2/4)$ et $f(3/4)$. Que peut-on dire de l'aire totale de la partie du plan formée par ces quatre rectangles par rapport à l'aire sous la courbe de f ?
2. Calculer la somme totale s_4 des aires de ces rectangles et en déduire un minorant de l'aire A .
3. Tracer en vert sur chacun des intervalles $[0; 1/4]$, $[1/4; 2/4]$, $[2/4; 3/4]$ et $[3/4; 1]$ les rectangles R'_1 , R'_2 , R'_3 et R'_4 de hauteurs respectives $f(1/4)$, $f(2/4)$, $f(3/4)$ et $f(1)$. Que peut-on dire de l'aire totale de la partie du plan formée par ces quatre rectangles par rapport à l'aire sous la courbe de f ?
4. Calculer la somme totale S_4 des aires de ces rectangles et en déduire un majorant de l'aire A .
5. En déduire une valeur approchée de l'aire sous la courbe.
6. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous dans lequel les variables s et S contiennent en sortie respectivement la somme des aires des rectangles inférieurs et celle des rectangles supérieurs.

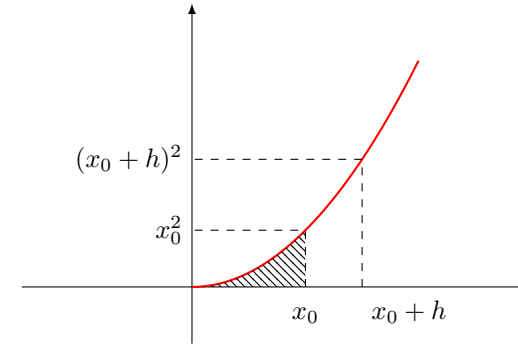
```

x ← 0
s ← 0
S ← 0
Pour k allant de 0 à 3
  s ← s + ...
  x ← x + ...
  S ← S + ...
Fin Pour

```

Fonction aire

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x^2$. On considère la fonction F qui à chaque réel x_0 de l'intervalle $[0; 1]$ associe l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$.



1. Que peut-on dire de $F(0)$?
2. Soit h un réel positif tel que $x_0 + h$ appartienne à $[0; 1]$.
 - (a) Que représente graphiquement la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$?
 - (b) Justifier que $hx_0^2 \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h(x_0 + h)^2$.
 - (c) En déduire un encadrement du rapport :

$$r(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

3. Dans le cas où h est un réel strictement négatif tel que $x_0 + h$ appartienne à $[0; 1]$, montrer que $(x_0 + h)^2 \leq r(h) \leq x_0^2$.
4. (a) Déduire des encadrements précédents la limite de $r(h)$ lorsque h tend vers 0.
 (b) En déduire que la fonction F est dérivable en x_0 et déterminer son nombre dérivé en ce point.