## Opérations sur les variables aléatoires

**Exercice 1**
Une urne contient 100 tickets numérotés : trente avec le nombre $2$, quarante avec le nombre $3$, vingt-cinq avec le nombre $5$ et cinq avec le nombre $7$. On choisit au hasard un ticket dans l'urne et on note $X$ la variable aléatoire égale au numéro inscrit sur le ticket. On note $Z$ la variable aléatoire égale au double de $X$.

1. Exprimer $Z$ en fonction de $X$.
2. Déterminer la loi de probabilité de $Z$.

**Exercice 2**
On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois papiers portant les numéros $0$, $2$ et $4$, l'autre contient cinq papiers : deux portent le numéro $1$ et trois portent le numéro $3$. On tire un papier de chaque sac et on additionne les numéros obtenus. On note $Z$ la variable aléatoire qui donne le résultat.

1. Définir deux variables aléatoires $X$ et $Y$ telles que $Z = X + Y$.
2. A l'aide d'un arbre de probabilités, déterminer les valeurs prises par la variable $Z$ puis sa loi de probabilités.

**Exercice 3**
Une urne contient trois jetons rouges marqués « $0$ » et deux jetons bleus marqués « $1$ ». On tire au hasard deux jetons successivement de l'urne. Soit $X$ la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré et $Y$ la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$ si le tirage du second jeton se fait :

1. avec remise
2. sans remise

**Exercice 4**
Anaïs a dans son porte-monnaie trois pièces d'un euro et cinq pièces de $2$ euros. Elle pioche deux pièces, l'une après l'autre, sans remise. On note $Z$ la variable aléatoire qui donne la somme totale obtenue.

1. Établir la loi de probabilités de $Z$.
2. Quelle est la probabilité que la somme obtenue soit supérieure à 2,5€ ?

## Espérance et variance

**Exercice 5**
On donne les lois de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ ci-dessous :

| $a$ | $0$ | $10$ | $25$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | $0,20$ | $0,50$ | $0,30$ |

| $b$ | $10$ | $15$ |
|---|---|---|
| $P(Y = b)$ | $0,40$ | $0,60$ |

Déterminer l'espérance des variables $X$ et $Y$ et en déduire les espérances des variables $Z = 4X$ et $S = X + Y$.

**Exercice 6**
Après un contrôle, un professeur montre aux élèves de la classe la répartition des notes :

| Note | $4$ | $6$ | $8$ | $9$ | $10$ | $12$ | $13$ | $15$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | $0,05$ | $0,05$ | $0,1$ | $0,25$ | $0,2$ | $0,2$ | $0,1$ | $0,05$ |

Avant de connaître son résultat, une élève se demande quelle note elle peut espérer. Elle considère pour cela une variable aléatoire $X$ qui représente sa note et dont la loi de probabilité est la distribution des notes.

1. Calculer l'espérance de $X$.
2. Le professeur dit : « Le test est mal réussi, je vais multiplier toutes les notes par $1,2$ ». Quelle est la nouvelle valeur de l'espérance de la note de cette élève ?

**Exercice 7**
Lors d'une opération commerciale dans un magasin, chaque client obtient un numéro au hasard entre $1$ et $50$. Si le numéro est pair, il gagne un bon d'achat de $5$€ et si le numéro est un multiple de $4$, il gagne en plus un bon d'achat de $10$€. On note $Z$ la variable aléatoire qui donne le gain total du client.

1. Définir deux variables aléatoires $X$ et $Y$ telles que $Z = X + Y$.
2. Calculer l'espérance de $X$ et celle de $Y$.
3. En moyenne, quel est le montant du bon d'achat qu'un client peut espérer gagner ?

**Exercice 8**
Dans un atelier textile américain, la temperature exprimée en Farenheit, ne s'ecarte jamais de plus de 2 degrés de 62 degrés. Plus précisément, la température est une variable aléatoire $F$ de loi de probabilités :

| $f$ | $60$ | $61$ | $62$ | $63$ | $64$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(F = f)$ | $0,05$ | $0,25$ | $0,4$ | $0,25$ | $0,05$ |

1. Déterminer l'espérance de la variable $F$.
2. On décide de lire les températures en degrés Celsius, qui vérifie la relation $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Quelle est l'espérance de la température exprimée en degrés Celsius ?

## Application à la loi binomiale

**Exercice 9**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$. Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

**Exercice 10**
Une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ inconnus. On sait que son espérance vaut $0,4$ et son écart-type vaut $0,6$. Déterminer les paramètres $n$ et $p$.

**Exercice 11**
Deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes suivent respectivement la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,65$ et la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,65$. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type des variables $X$, $Y$ et $X + Y$.

**Exercice 12**
On interroge de manière indépendante $300$ personnes lors d'un sondage sur la réalisation d'un projet d'urbanisme. On note $X_i$ la variable aléatoire qui vaut $0$ si la $i$-ème personne est opposée au projet et $1$ si elle y est favorable. On sait que la probabilité qu'elle soit opposée à ce projet est $0,365$.

1. Quelle est la loi suivie par chaque $X_i$ ?
2. On note $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{300}$.
   (a) Donner, en justifiant, la loi de probabilité de la variable $S$.
   (b) Sur un groupe de $300$ personnes, en moyenne, combien seront favorables au projet ?

**Exercice 13**
Un professeur pose à ses élèves un questionnaire à choix multiples (QCM) composé de 10 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont possibles, dont une seule est exacte. Un élève décide de répondre au hasard à ce questionnaire. On suppose que les réponses qu'il donne à chaque question sont indépendantes. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de bonnes réponses de cet élève à ce questionnaire.

1. Justifier que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.
2. En moyenne, combien de bonnes réponses obtiendra-t-il ?
3. Afin de sanctionner les élèves qui répondraient au hasard, le professeur a décidé d'accorder un point par bonne réponse et de retirer 2 points par mauvaise réponse. On note $N$ la variable aléatoire égale à la note obtenue par un élève.
   (a) Montrer que $N = 3X - 20$.
   (b) Calculer l'espérance de $N$.

## Échantillon d'une loi de probabilité

**Exercice 14**
On lance cinq dés bien équilibrés à six faces. On note $X$ la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de $X$.

**Exercice 15**
Au 1er janvier 2020, le prix du timbre pour une enveloppe de 20 g ou moins s'élève à 0,95 € pour les timbres gris, 0,97 € pour les timbres verts, 1,16 € pour les timbres rouges et 1,40 € pour les timbres internationaux. On se rend dans un bureau de poste et le directeur d'établissement donne les informations suivantes sur l'affranchissement des lettres de 20 g ou moins.

| Prix (€) | $0,95$ | $0,97$ | $1,16$ | $1,40$ |
|---|---|---|---|---|
| Fréquence (%) | $12$ | $56$ | $20$ | $12$ |

On prélève 20 enveloppes de 20g ou moins de ce bureau de poste. On supposera que le nombre de lettres est suffisamment important pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise. Pour tout entier $k \in \{1; 2; \dots ; 20\}$, on note $X_k$ la variable aléatoire correspondant au prix du timbre de la $k$-ème enveloppe choisie et $S_{20} = X_1 + \cdots + X_{20}$.

1. À quoi la variable aléatoire $S_{20}$ correspond-elle ?
2. En moyenne, à combien le prix des 20 timbres s'élève-t-il ? Justifier.
3. Déterminer la valeur exacte de $\sigma(S_{20})$.

**Exercice 16**
Une puce se déplace en sautant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine $O$. Au départ, elle se situe à l'abscisse $0$ et se déplace, à chaque unité de temps, d'une unité vers la droite avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ ou d'une unité vers la gauche avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$. On suppose les déplacements de la puce indépendants les uns des autres. Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $X_k$ la variable aléatoire qui vaut $1$ si le $k$-ème saut de la puce a lieu vers la droite et qui vaut $-1$ sinon. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $S_n$ l'abscisse de la puce après $n$ sauts.

1. Donner, pour tout entier naturel $k$ non nul, l'espérance et la variance de $X_k$.
2. Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $S_n$ en fonction des variables $X_k$.
3. En déduire l'espérance et la variance de $S_n$.

**Exercice 17**
Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante :

| $x$ | $-5$ | $0$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $0,32$ | $0,35$ | $0,33$ |

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille $n$ de la loi de probabilité $X$. Compléter le programme en Python suivant afin qu'il simule la somme d'un tel échantillon.

```
import random

def simul():
    x = random.random()
    if x < ..... :
        return -5
    if 0.32 < x <= ..... :
        return 0
    if 0.67 < x :
        return .....

def echantillon(n):
    s = 0
    for k in range(....., .....):
        ....
    return .....
```

**Exercice 18**
Compléter la fonction `binom` ci-dessous écrite en langage Python, qui a pour arguments un nombre entier `n` et un nombre flottant `p` compris entre $0$ et $1$ et qui renvoie un nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$.

```
import random

    def binom(n,p):
        s = ...
        for k in range(....., .....):
            x = random.random()
            if ....... :
                s = ........
        return ......
```

**Exercice 19**
Dans une population d'adultes, la variable aléatoire $X$ associe à chaque individu sa glycémie, en milligrammes par 100 millilitres. On suppose que $X$ a pour espérance $92$ et pour écart-type $7$. Soit $M$ la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de $400$ personnes prises parmi cette population. Déterminer l'espérance et l'écart-type de $M$.

**Exercice 20**
Les gains d'un ticket de grattage sont modélisés par la variables aléatoire $X$ dont la loi est donnée ci-dessous :

| $x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $0,7$ | $0,2$ | $0,06$ | $0,04$ |

1. Quel est le gain moyen d'un ticket ? Quel est son écart-type ?
2. Les tickets sont vendus par lots de $50$ auprès des revendeurs. On assimile un lot à un échantillon de $50$ variables aléatoires indépendantes de même loi que $X$.
   (a) Déterminer la gain moyen d'un lot de tickets.
   (b) Déterminer l'écart-type moyen d'un lot de tickets.

**Exercice 21**
Une urne contient $100$ boules numérotées de $1$ à $100$. On effectue $100$ tirages au hasard d'un boule avec remise. On note $X_k$ le numéro de la boule obtenue au $k$-ème tirage. On suppose que les variables $X_k$ sont indépendantes et on note $M$ la variable aléatoire égale à la moyenne de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$. Calculer l'espérance et la variance de $M$.