CHAPITRE 12

Sommes de variables aléatoires

I Opérations sur les variables aléatoires

1. Produit par un réel et somme

Définition I.1

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soit a un réel. La variable aléatoire aX est la variable aléatoire qui prend les valeurs ax_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) telle que $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.

Exemple I.1 — On lance un dé bien équilibré à six faces. X est la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Z est la variable égale au triple de ce numéro. Exprimer Z en fonction de X et donner la loi de probabilité de Z. $\longrightarrow$ À rédiger

Définition I.2

Soit X et Y deux variables aléatoires qui prennent les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \cdots, y_m$. La variable aléatoire $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs $x_i + y_j$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$) telle que $P(X + Y = k)$ est la somme de toutes les probabilités $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ pour lesquels $x_i + y_j = k$.

Exemple I.2 — On dispose d'un dé cubique et d'un dé tétraédrique. On lance successivement chacun des dés et on note X la variable aléatoire égale au numéro sur le dé cubique et Y celle égale a numéro sur le dé tétraédrique. On note S la variable égale à la somme totale obtenue sur les deux dés.

1. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer les valeurs possibles de la variable S.
2. Déterminer la loi de probabilité de S. $\longrightarrow$ À rédiger

2. Espérance

Proposition I.3 (Linéarité de l'espérance)

Soit X et Y deux variables aléatoires et a un réel.

- $E(aX) = aE(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Exemple I.3 — X et Y sont deux variables aléatoires telles que $E(X) = 2,5$ et $E(Y) = 3,4$. Déterminer l'espérance des variables aléatoires : $4X$, $X + Y$ et $2X - 3Y$. $\longrightarrow$ À rédiger

3. Variance

Définition I.4

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si elles sont associées à des épreuves indépendantes.

Remarque — Mathématiquement, X et Y sont indépendantes si pour tous i et j, les événements $X = x_i$ et $Y = y_i$ sont indépendants, c'est-à-dire $P(X = x_i \cap Y = y_i) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.

Proposition I.5

Soit X et Y deux variables indépendantes et a un réel.

- $V(aX) = a^2V(X)$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple I.4 — X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $V(X) = 5$ et $V(Y) = 7$. Déterminer la variance et l'écart-type des variables aléatoires $3X$ et $X + Y$. $\longrightarrow$ À rédiger

II Application à la loi binomiale

Proposition II.1

Si X est un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p alors X peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Exemple II.1 — On lance un dé bien équilibré 3 fois de suite et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu un 5. Décomposer X en une somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même loi. $\longrightarrow$ À rédiger

Proposition II.2

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple II.2 — Chaque vendredi, Serena achète un ticket d'un jeu de hasard pour lequel la probabilité de gagner est de $0,05$. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si elle a eu un ticket gagnant la i-ème semaine et 0 sinon.

1. On note $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Interpréter la variable aléatoire S et donner sa loi de probabilité.
2. Déterminer l'espérance de S, interpréter puis donner la variance et l'écart-type de S. $\longrightarrow$ À rédiger

III Échantillon d'une loi de probabilités

Définition III.1

- On appelle **échantillon** de taille n d'une loi de probabilité toute liste $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes cette loi de probabilité.
- La somme de cet échantillon est la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
- La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

Remarque — Dans un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tous les X_k ont les mêmes espérance, variance et écart-type.

Proposition III.2

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n d'une loi de probabilité.

- $E(S_n) = nE(X_1)$
- $V(S_n) = nV(X_1)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_1)$

- $E(M_n) = E(X_1)$
- $V(M_n) = \dfrac{V(X_1)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$

Exemple III.1 — Une roue de loterie comporte cinq secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et les deux derniers valent -400 points. On fait tourner la roue 4 fois de suite et on gagne la somme des points obtenus lors des 4 lancers de la roue. On note Z la variable aléatoire égale au gain algébrique en points à la fin du jeu.

1. Décomposer Z en une somme de variables aléatoires identiques et indépendantes dont on donnera la loi.
2. Calculer $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple III.2 — Une machine produit des joints. La variable aléatoire X qui à un joint pris au hasard associe son épaisseur a pour espérance 2 mm et pour écart-type 0,1mm. On prélève un échantillon de 100 joints et on note M la variable aléatoire égale à l'épaisseur moyenne des joints de cet échantillon.

1. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de M.
2. Calculer à nouveau ces indicateurs si l'échantillon tiré est cette fois de taille 500. $\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1
On a $Z = 3X$. La loi de probabilité de Z est

z_i	3	6	9	12	15	18
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple I.2

1. On a le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10

Les valeurs possibles de la variable S sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

2. On a la loi de probabilité suivante :

z_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Exemple I.3

1. $E(4X) = 4E(X) = 4 \times 2,5 = 10.$
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2,5 + 3,4 = 5,9.$
3. $E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 2,5 - 3 \times 3,4 = -5,2.$

Exemple I.4

1. $V(3X) = 3^2 V(X) = 9 \times 5 = 45$ donc $\sigma(3X) = \sqrt{45}$.
2. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 7 + 5 = 12$ donc $\sigma(X + Y) = \sqrt{12}$.

Exemple II.1
$X = X_1 + X_2 + X_3$ où, pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$:

- $X_i = 1$ si le i-ème lancer donne un 5 et 0 sinon.
- X_i suit la loi de Bernoulli de paramètres $p = 1/6$.

Proposition II.2
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. On sait que X peut s'écrire comme $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ où les X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi,
$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = p + p + \cdots + p = np$
$V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p)$

Exemple II.2

1. S compte le nombre de tickets gagnants. Comme il s'agit d'une répétition identique et indépendante d'une même expérience de Bernoulli, S la loi binomiale de paramètres $n = 52$ et $p = 0,05$.
2. $E(S) = np = 52 \times 0,05 = 2,6$. Serena aura en moyenne $2,6$ tickets gagnants sur les 52 semaines.
   $V(S) = np(1-p) = 52 \times 0,05 \times 0,95 = 2,47$ et $\sigma(S) = \sqrt{V(S)} \approx 1,57$.

Exemple III.1

1. $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ où, pour tout $1 \leqslant k \leqslant 4$:
   - Chaque X_k est le nombre de points obtenus au k-ème lancer.
   - Chaque X_k suit la loi de probabilités suivante :

z_i	-400	100	300
p_i	$0,4$	$0,2$	$0,4$

2. $E(X_1) = 0,4 \times (-400) + 0,2 \times 100 + 0,4 \times 300 = -20$
   $V(X_1) = 0,4 \times (-400 - (-20))^2 + 0,2 \times (100 - (-20))^2 + 0,4 \times (300 - (-20))^2 = 101600$
   $\sigma(X_1) = \sqrt{V(X_1)} = \sqrt{101600} \approx 318,75$
   Ainsi,
   $E(Z) = 4 \times E(X_1) = 4 \times (-20) = -80$
   $V(Z) = 4 \times V(X_1) = 4 \times 101600 = 406400$
   $\sigma(Z) = \sqrt{4}\sqrt{X_1} \approx 2 \times 318,75 = 637,5$

Exemple III.2

1. On peut considèrer que $M = (X_1 + X_2 + \cdots + X_100)/100$ où les X_k sont indépendantes et de même loi ($E(x_k) = 2$ et $\sigma(X_k) = 0,1$ donc $V(X_k) = 0,1^2 = 0,01$). Ainsi,
   $E(M) = E(X_1) = 2$
   $$V(M) = \frac{V(X_1)}{100} = \frac{0,01}{100} = 0,0001$$
   $$\sigma(M) = \frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{100}} = \frac{0,1}{10} = 0,01.$$
2. Dans ce cas, on aurait :
   $E(M) = E(X_1) = 2$
   $$V(M) = \frac{V(X_1)}{500} = \frac{0,01}{500} = 0,00002$$
   $$\sigma(M) = \frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{500}} \approx 0,005.$$

Sommes de variables aléatoires

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter une variable comme somme de deux variables plus simples
- Connaître et savoir utiliser les formules donnant l'espérance de aX et $X+Y$
- Savoir ce que sont deux variables indépendantes
- Connaître et savoir utiliser les formules donnant la variance de aX et $X+Y$
- Savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une loi binomiale
- Savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon

Sommes de variables aléatoires

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter une variable comme somme de deux variables plus simples
- Connaître et savoir utiliser les formules donnant l'espérance de aX et $X+Y$
- Savoir ce que sont deux variables indépendantes
- Connaître et savoir utiliser les formules donnant la variance de aX et $X+Y$
- Savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une loi binomiale
- Savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon

Sommes de variables aléatoires

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter une variable comme somme de deux variables plus simples
- Connaître et savoir utiliser les formules donnant l'espérance de aX et $X+Y$
- Savoir ce que sont deux variables indépendantes
- Connaître et savoir utiliser les formules donnant la variance de aX et $X+Y$
- Savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une loi binomiale
- Savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme et de la moyenne d'un échantillon