Bac – d'après Amérique Du Sud Novembre 2024 - Jour 1

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

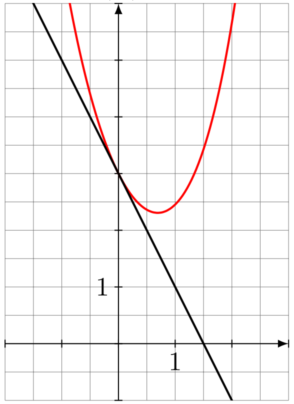
1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Bac – d'après Centres étrangers 10 juin 2021

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

Primitives et équations différentielles — Sujets de bac

   (a) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   (b) Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
   (c) En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle : $(E): \quad y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1$
   (a) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$ est solution de l'équation (E).
   (b) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' + y = 0$.
   (c) On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - g$ est solution de (E_0) ».
   (d) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Bac S – Métropole Juin 2005

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3\text{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\text{e}^{\frac{x}{4}}}$.

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2\text{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' = \dfrac{y}{4}$.

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   (b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\text{E}_2)\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

   où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   (a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\text{E}_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   (b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Primitives et équations différentielles — Sujets de bac