Notion d'équation différentielle

Exercice 1
Soit l'équation différentielle $y' + 3y = 12$, pour x réel. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 4 + \mathrm{e}^{-3x}$ est une solution de cette équation.

Exercice 2
Montrer que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = x\ln(x) - x$ est une solution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \ln(x)$.

Exercice 3
Trouver une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2x - 3$.

Exercice 4
On considère l'équation différentielle $y' = x\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.
Déterminer deux réels a et b tels que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = x^2(a\ln(x) + b)$ soit une solution de cette équation.

Primitive d'une fonction

Exercice 5
Dans chaque cas, montrer que F est une primitive de f sur I.

1. $F(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^3$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et $I = \mathbb{R}$
2. $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $I =]0;+\infty[$
3. $F(x) = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^x + 1}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice 6
Soit F et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive G de f telle que $G(0) = 4$.

Exercice 7
On considère l'équation différentielle $y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ est une solution de cette équation.
2. En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution F de cette équation telle que $F(0) = 0$.

Exercice 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+2)\mathrm{e}^x$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = f$.

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$ où a et b sont deux réels. Calculer $F'(x)$.
2. Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f.
3. En déduire toutes les solutions de l'équations (E) sur $\mathbb{R}$.

Calculs de primitives

Exercice 9
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^5$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^8}$
5. $f(x) = 6x^3 - \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 1$
6. $f(x) = 6x - 1 + \dfrac{4}{x^2}$
7. $f(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - 3x + 2\sin(x)$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$
9. $f(x) = 3\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{x} - 4x^7 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos(x)$

Exercice 10
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
1. $f(x) = 3x^2(x^3+3)^4$ 2. $f(x) = 4(1+4x)^3$
3. $f(x) = (x+1)(x^2+2x+4)^5$ 4. $f(x) = (2x+1)^4$

Exercice 11
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \dfrac{2x+5}{(x^2+5x)^4}$ 2. $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{(x^3+2x)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{9}{(4x+1)^3}$

Exercice 12
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}$ 2. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 13
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
1. $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+1}$ 2. $f(x) = 4\mathrm{e}^{2x-3}$
3. $f(x) = (x^2+2)\mathrm{e}^{x^3+6x}$

Exercice 14
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ 2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$ 3. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3\sin(x)+1}$

Exercice 15
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \cos(2x)$ 2. $f(x) = \sin(3x+4)$

Exercice 16
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
1. $m(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{3}) - 5x$ 2. $u(x) = x\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{x}{x^2+1}$
3. $v(x) = 7(\mathrm{e}^x+2)^{10} \times \mathrm{e}^x$

Exercice 17
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.
Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 2$.

Exercice 18
Déterminer l'unique solution F sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x$ telle que $F(0) = 5$.

Équation différentielle $y' = ay$

Exercice 19

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution F de cette équation telle que $F(1) = 4$.

Exercice 20
Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure des courbes de solutions :
1. $y' = -2y$ 2. $y' - 3y = 0$ 3. $-y' + 0,1y = 0$
4. $y' + \ln(2)y = 0$

Exercice 21
Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution F vérifiant la condition donnée :

1. $y' = 5y$ et $F(0) = 2$
2. $y' + 6y = 0$ et $F(1) = 1$
3. $2y' - 3y = 0$ et $F(4) = 2$
4. $2y' = 5y$ et $F'(0) = 5$

Exercice 22
On souhaite étudier la vitesse de rotation angulaire d'un disque dans un liquide. Cette vitesse $N(t)$ représente le nombre de tours par minutes à l'instant t, exprimé en minutes. La fonction N vérifie l'équation différentielle $y' = -\ln(100)y$.

1. Déterminer la fonction N sachant que $N(0) = 1500$.
2. Calculer la vitesse angulaire à l'instant $t = 1$.
3. Au bout de combien de temps la vitesse angulaire sera-t-elle d'un tour par minute ? Donner la valeur exacte et une valeur approchée à la seconde près.

Exercice 23
Tuan a écrit le script suivant d'une fonction Python qui renvoie la solution d'une équation différentielle.

```
import math

def solution(a, x_0, y_0):
    C = y_0/math.exp(a * x_0)
    sol = "f est definie par f(x)="
    sol = sol + str(C) + "e^(" + str(a) + "x)"
    return sol
```

1. Que renvoie l'instruction `solution(2,0,1)` ?
2. Quelle équation différentielle peut-on résoudre avec cette fonction ?

Exercice 24
Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux. t est le temps, exprimé en jours, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t. On établit, en physique, que la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $N : t \mapsto N(t)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ où λ est un réel strictement positif appelé constante radioactive du corps.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes à l'instant $t = 0$. Déterminer l'expression de $N(t)$ en fonction de t.
2. On appelle « période » ou « demi-vie » de ce corps radioactif le temps T au bout duquel le nombre d'atomes a diminué de moitié.
   (a) Calculer T en fonction de λ.
   (b) Calculer, à 10^{-3} près, la constante radioactive de l'iode 131 sachant que sa période est de 8,06 jours.

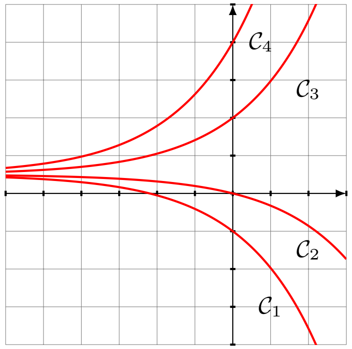
Équations différentielles $y' = ay + b$

Exercice 25
Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:
1. $y' = -2y + 5$ 2. $y' = y - 3$ 3. $2y' + y = 4$
4. $3y' - 6y = 1$

Exercice 26
Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution F sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle vérifiant la condition donnée :

1. $y' = 3y - 6$ et $F(0) = -1$
2. $y' = -5y + 4$ et $F(1) = 0$
3. $y' = y - 1$ et $F(2) = 1$

Exercice 27
Les courbes ci-dessous représentent quatre solutions de l'équation différentielle $2y' = y - 1$.



Résoudre cette équation puis donner des équations des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.

Exercice 28
On place une tasse de thé bouillant dans une pièce où la température est constante égale à 20°. Selon la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement de la tasse est proportionnelle à la différence de température entre la température de la tasse et celle de la pièce. On note $T(t)$ la température (en °C) de la tasse à l'instant t (exprimé en minutes).
On suppose que $T(0) = 100$ et, d'après la loi de Newton, il existe une constante réelle k telle que $T'(t) = k(T(t) - 10)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = k(y - 20)$ et en déduire l'expression de $T(t)$ en fonction de t et de k.
2. Au bout de 14 minutes, la température du thé est égale à $40°$.
   (a) Démontrer que $k = \frac{-\ln(2)}{7}$.
   (b) Au bout de combien de temps la température du thé devient-elle inférieure à $25°$?

Équations différentielles $y' = ay + f$

Exercice 29
On considère l'équation différentielle
$(E) : y' - y = \cos(x) - 3\sin(x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x) + 2\sin(x)$. Montrer que g est une solution particulière de (E).
2. Montrer que F est une solution sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $F - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la solution telle que $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 30
On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -4y + x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer une solution particulière g de cette équation sous la forme $g(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont des constantes.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -4y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 31
Lors d'une soirée, Noah a bu à jeûn une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à son taux d'alcool dans le sang, exprimé en $g \cdot L^{-1}$, en fonction du temps t, exprimé en heure.
Comme il faut un certain temps pour que le corps absorbe l'alcool, on peut modéliser son taux d'alcool par une fonction F définie sur $[0,05;+\infty[$. On admet que F est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -y + k\mathrm{e}^{-t}$ et $f(0,05) = 0$, où k est une constante positive dépendant de la quantité d'alcool absorbée et de la corpulence de l'individu.

1. (a) Exprimer, en fonction de k, le nombre réel a tel que la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t) = at\mathrm{e}^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation (E).
   (b) En déduire l'expression de $F(t)$ en fonction de k.
2. Étudier le sens de variation de la fonction F et vérifier qu'il ne dépend pas de k.
3. Au bout de 3 heures, Noah teste son alcoolémie et obtient un taux d'alcool égal à $0,8g \cdot L^{-1}$. Sachant que Noah est un jeune conducteur et que, selon la loi française, le taux d'alcool maximal autorisé pour les jeunes conducteurs est $0,2g \cdot L^{-1}$, combien de temps devra-t-il patienter pour pouvoir prendre le volant et rentrer chez lui ?