CHAPITRE 11

Primitives et équations différentielles

I Équation différentielle $y' = f$

1. Notion d'équation différentielle

Définition I.1

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction, ses dérivées successives et la variable x.

Exemple I.1 — 1. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + y = 2\mathrm{e}^x$.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \cos(x)$ est une solution de l'équation différentielle $y'' = -y$. → À rédiger

Définition I.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction F est solution de l'équation différentielle $y' = f$ si, et seulement si, F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple I.2 — Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$.
Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y' = 2x$. → À rédiger

2. Primitive d'une fonction sur un intervalle

Définition I.3

Soit f une fonction définie sur intervalle I. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f si pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque — Dire que F est une primitive de f revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple I.3 — Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2$. → À rédiger

Théorème I.4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe un réel k tel que $G = F + k$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.4 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x$. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{-1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$ est une primitive de f et en déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$. → À rédiger

Proposition I.5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 et y_0 deux réels. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.
Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ possède une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple I.5 — Déterminer la solution F de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{2x}$ telle que $F(0) = 1$. → À rédiger

Théorème I.6

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Remarque — Cependant, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite. C'est le cas de la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

II Calcul de primitives

1. Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle I	Une primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} (n > 1)$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$F(x) = \dfrac{-1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x)$

Exemple II.1 — Déterminer une primitive de x^2, de x^3, de x^{10}, de $\dfrac{1}{x^4}$, de e^{-x} et de e^{5x}. → À rédiger

2. Somme et produit par un réel

Proposition II.1

Soit f et g deux fonctions et soit F et G deux primitives de ces fonctions.

- Une primitive de $f + g$ est $F + G$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, une primitive de $k \times f$ est $k \times F$.

Exemple II.2 — Dans chaque cas, déterminer une primitive :

1. $f(x) = 6x^2 - 3x + \mathrm{e}^{-5x} - 2$ 2. $g(x) = 5 - \dfrac{3}{x^2}$ 3. $h(x) = \mathrm{e}^{4x} - x^2 + 4\cos(x)$ → À rédiger

Exemple II.3 — Résoudre l'équation différentielle $y' = x^2 + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$. → À rédiger

3. Primitives et composées

Fonction f	Domaine de validité	Une primitive F
$f = u^n \times u'$ $(n \in \mathbb{N})$	I	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{u^n}$ $(n > 1)$	en tout $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$	$F(x) = \dfrac{-1}{n-1} \times \dfrac{1}{u^{n-1}}$
$f = \dfrac{u'}{u}$	en tout $x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$	$F = \ln(\lvert u \rvert)$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	en tout $x \in I$ tel que $u(x) > 0$	$F = 2\sqrt{u}$
$f = u'\mathrm{e}^u$	I	$F = \mathrm{e}^u$
$f = u'\cos(u)$	I	$F = \sin(u)$
$f = u'\sin(u)$	I	$F = -\cos(u)$
$f = u' \times (v' \circ u)$	I	$F = v \circ u$

Exemple II.4 — Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}$ 2. $g(x) = 2\cos(2x)$ 3. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

4. $k(x) = \dfrac{12x^3 + 2x}{\sqrt{3x^4 + x^2 + 1}}$ 5. $l(x) = 5(-3 + 5x)^7$ → À rédiger

Exemple II.5 — Déterminer l'unique solution F de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{3x+5}$ telle que $F(1) = 3$. → À rédiger

III Équations différentielles $y' = ay$, $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

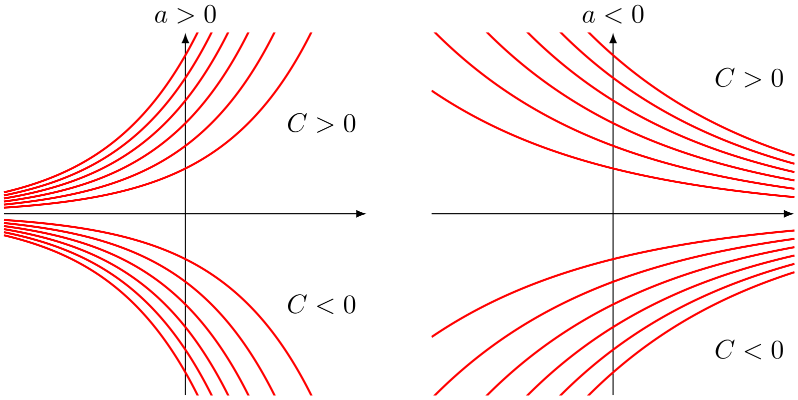
1. Équation différentielle $y' = ay$

Théorème III.1

Soit a un nombre réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C \times \mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Remarque — L'allure des courbes des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est la suivante :



Remarque — Si f et g sont deux solutions de l'équation $y' = ay$ alors $f + g$ et $k \times f$ ($k \in \mathbb{R}$) sont aussi des solutions de cette équation.

Exemple III.1 — Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y$ sur $\mathbb{R}$. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple III.2 — On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 7y = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution F de (E) vérifiant la condition $F(0) = 2$. $\longrightarrow$ À rédiger

2. Équation différentielle $y' = ay + b$

Proposition III.2

Soit a et b deux nombres réels. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C \times \mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Exemple III.3 — 1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y - 2$.

2. Déterminer la solution F de cette équation telle que $F(0) = 2$. $\longrightarrow$ À rédiger

3. Équation différentielle $y' = ay + f$

Exemple III.4 — Soit (E) l'équation différentielle $y' = y + x - 3$.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 2$ est une solution particulière de cette équation.
2. Soit F une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est une solution de l'équation (E) si, et seulement si, $F - g$ est une solution de l'équation $y' = y$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équations (E). $\longrightarrow$ À rédiger

Proposition III.3

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C \times \mathrm{e}^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle et où g est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$.

Solutions

Exemple I.1

1. Pour tout réel x, $h'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$. Ainsi,
$h'(x) + h(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$
donc h est bien solution de l'équation différentielle $y' + y = 2\mathrm{e}^x$.
2. Pour tout réel x, $g'(x) = -sin(x)$ et $g''(x) = -cos(x)$ donc $g''(x) = -g(x)$. La fonction g est donc bien solution de l'équation différentielle $y'' = -y$.

Exemple I.2

Pour tout réel x, $F'(x) = 2x$ donc F est bien solution de l'équation différentielle $y' = 2x$.

Exemple I.3

Pour tout réel x, $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2 = f(x)$ donc F est bien une primitive de f.

Théorème I.4

Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I alors $F' = f$ et $G' = f$ sur I. Ainsi,
$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$
donc la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I. Il existe donc une constante $k \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = k$ d'où $G = F + k$.

Exemple I.4

Pour tout réel x, $F'(x) = \frac{-1}{3} \times 3x^2 + \frac{3}{2} \times 2x = -x^2 + 3x = f(x)$ donc F est bien une primitive de f.
On en déduit que toute primitive G de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme $G(x) = \frac{-1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + k$ où k est un réel.

Exemple I.5

On remarque que la fonction $G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ est une solution de cette équation car $G'(x) = \frac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$.
Ainsi, toute solution F de l'équation $y' = \mathrm{e}^{2x}$ est de la forme $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + k$ où k est une constante. Comme $F(0) = 1$ alors $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 0} + k = 1$ donc $\frac{1}{2} + k = 1$ donc $k = \frac{1}{2}$.
Ainsi, l'unique solution de l'équation $y' = \mathrm{e}^{2x}$ telle que $F(0) = 1$ est $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}$.

Exemple II.1

Une primitive de x^2 est $\frac{1}{3}x^3$.
Une primitive de x^3 est $\frac{1}{4}x^4$.
Une primitive de x^{10} est $\frac{1}{11}x^{11}$.
Une primitive de $\frac{1}{x^4}$ est $\frac{-1}{3}\frac{1}{x^3}$.
Une primitive de e^{-x} est $\frac{1}{-1}\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}$.
Une primitive de e^{5x} est $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}$.

Exemple II.2

1. $F(x) = 6 \times \frac{1}{3}x^3 - 3 \times \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{-5}\mathrm{e}^{-5x} + (-2)x = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x} - 2x$.
2. $G(x) = 5x - 3 \times \frac{-1}{1} \times \frac{1}{x^1} = 5x + \frac{3}{x^2}$.
3. $H(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{3}x^3 + 4\sin(x)$.

Exemple II.3

Une primitive de $x \mapsto x^2 + \cos(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \sin(x)$ donc les solutions de l'équation différentielle $y' = x^2 + \cos(x)$ sont les fonctions F de la forme $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sin(x) + k$ où k est un réel.

Exemple II.4

1. $F(x) = \mathrm{e}^{x^3}$
2. $G(x) = \sin(2x)$
3. $H(x) = \ln\left(x^2 + 3\right)$
4. $K(x) = \sqrt{3x^4 + x^2 + 1}$
5. $L(x) = \frac{1}{8} \times (-3 + 5x)^8$

Exemple II.5

Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x+5}$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+5}$. Ainsi, l'unique solution de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{3x+5}$ est de la forme $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+5} + k$ où k est un réel.
Or, $F(1) = 3$ donc $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\times 1+5} + k = 3$ d'où $k = 3 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^8$. Ainsi, l'unique solution de cette équation est $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+5} + 3 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^8$.

Théorème III.1

• Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-ax}f(x)$. Pour tout réel x,
$g'(x) = -a\mathrm{e}^{-ax}f(x) + \mathrm{e}^{-ax}f'(x) = (-af(x) + f'(x))\mathrm{e}^{-ax}$. Or, $f'(x) = af(x)$ (puisque f est solution de l'équation $y' = ay$) donc $-af(x) + f'(x) = 0$.
On en déduit que $g'(x) = 0 \times \mathrm{e}^{-ax} = 0$. Par suite, la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$: il existe un réel C tel que pour tout réel x, $g(x) = C$.
On en déduit que $\mathrm{e}^{-ax}f(x) = C$ d'où $f(x) = C\mathrm{e}^{ax}$.
• Réciproquement, les fonctions f de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ sont bien solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ car, pour tout réel x,
$f'(x) = C \times a\mathrm{e}^{ax}$ et $af(x) = a \times C\mathrm{e}^{ax} = C \times a\mathrm{e}^{ax}$.

Exemple III.1

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\mathrm{e}^{2x}$ où C est un réel.

Exemple III.2

1. $y' - 7y = 0 \iff y' = 7y$. Les solutions de cette équation différentielle sont donc les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = C\mathrm{e}^{7x}$ où C est un réel.
2. $F(0) = 2 \iff C\mathrm{e}^{7\times 0} = 2 \iff C \times 1 = 2 \iff C = 2$
Ainsi, l'unique solution de l'équation $y' - 7y = 0$ telle que $F(0) = 2$ est $F(x) = 2 \times \mathrm{e}^{7x}$.

Exemple III.3

1. Les solutions de cette équation sont les fonctions F de la forme $F(x) = C\mathrm{e}^{3x} - \frac{-2}{3} = C\mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{3}$.
2. $F(0) = 2 \iff C\mathrm{e}^{3\times 0} + \frac{2}{3} = 2 \iff C = 2 - \frac{2}{3} \iff C = \frac{4}{3}$
Ainsi, l'unique solution de cette équation différentielle est $F(x) = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{3}$.

Exemple III.4

1. D'une part, pour tout réel x, $g'(x) = -1$.
D'autre part, $g(x) + x - 3 = (-x + 2) + x - 3 = -1$.
Ainsi, $g'(x) = g(x) + x - 3$ donc g est bien solution de l'équation différentielle $y' = y + x - 3$.
2. $$\begin{aligned} F - g \text{ est solution de } y' = y &\iff (F-g)' = F - g \\ &\iff F' - g' = F - g \\ &\iff F'(x) - (g(x) + x - 3) \\ &= F(x) - g(x) \\ &\iff F'(x) - x + 3 = F(x) \\ &\iff F'(x) = F(x) + x - 3 \\ &\iff F \text{ est solution de } (E) \end{aligned}$$
3. Les solutions de $y' = y$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^x$ où C est un réel. Ainsi, d'après la question précédente, les solutions F de (E) sont les fonctions telles que $F(x) - g(x) = C\mathrm{e}^x \iff F(x) = \mathrm{e}^x + g(x) \iff F(x) = \mathrm{e}^x - x + 2$.

Primitives et équations différentielles

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer une primitive d'une fonction usuelle
- Savoir utiliser les formules avec les composées pour déterminer une primitive
- Savoir que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une constante
- Savoir déterminer une primitive prenant une valeur donnée
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = f$
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay$
- Savoir déterminer une solution constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ lorsqu'on connaît une solution particulière
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay + f$ lorsqu'une solution particulière est donnée

Primitives et équations différentielles

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer une primitive d'une fonction usuelle
- Savoir utiliser les formules avec les composées pour déterminer une primitive
- Savoir que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une constante
- Savoir déterminer une primitive prenant une valeur donnée
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = f$
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay$
- Savoir déterminer une solution constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ lorsqu'on connaît une solution particulière
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay + f$ lorsqu'une solution particulière est donnée

Primitives et équations différentielles

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer une primitive d'une fonction usuelle
- Savoir utiliser les formules avec les composées pour déterminer une primitive
- Savoir que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une constante
- Savoir déterminer une primitive prenant une valeur donnée
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = f$
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay$
- Savoir déterminer une solution constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ lorsqu'on connaît une solution particulière
- Savoir résoudre l'équation différentielle $y' = ay + f$ lorsqu'une solution particulière est donnée