

Métropole – 9 septembre 2022 (7 points)

Les parties B et C sont indépendantesOn considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.**Partie A**

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Partie CPour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
3.
 - a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Dédurre de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α .

- a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

- b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; \alpha]$,

$$g(x) \geq \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

