

Fonction logarithme népérien

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes :

1. $e^{\ln(5)}$
2. $\ln(e^{-3})$
3. $e^{-\ln(2)}$
4. $\ln\left(\frac{1}{e^5}\right)$

Exercice 2

Résoudre chacune des équations suivantes :

1. $e^x = 7$
2. $\ln(x) = 5$
3. $e^x = -3$
4. $\ln(x) = -0,5$

Relation fonctionnelle

Exercice 3

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(2)$:

1. $\ln(16)$
2. $\ln\left(\frac{1}{8}\right)$
3. $3\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \ln(32)$
4. $\ln\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice 4

Exprimer en fonction de $\ln(3)$ et de $\ln(5)$ les nombres suivants :

1. $\ln(15)$
2. $\ln(75)$
3. $\ln(75) - \ln(25)$
4. $\ln\left(\frac{225}{27}\right)$

Exercice 5

Sans calculatrice, déterminer les valeurs exactes de

1. $\ln(e^3)$
2. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$
3. $\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^4\right)$
4. $\ln(e\sqrt{e})$

Exercice 6

Montrer que pour tout nombre réel x , $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

Exercice 7

Déterminer le nombre $S = \sum_{k=1}^{2020} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.

Dérivées avec la fonction logarithme

Exercice 8

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de f pour tout $x > 0$:

1. $f(x) = \ln(x) + x^3$
2. $f(x) = (x^2 - 1) \ln(x)$
3. $f(x) = \frac{2 + 3 \ln(x)}{x + 2}$

Exercice 9

1. Montrer que la fonction logarithme est concave sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction \ln en e .
3. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$.

Équations et inéquations avec du logarithme

Exercice 10

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $3e^x - 2 = 0$
2. $e^x + 1 = 3e^x - 5$
3. $e^{x+2} = 7$
4. $2e^{4-3x} \leqslant 1$
5. $-e^{-4x} + 1 > 3e^{-4x}$
6. $3e^{-2x+5} + 3 = e^{-2x+5}$

Exercice 11

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x) \leqslant 3$
2. $10 \ln(x) > 3$
3. $-2 \ln(x) \geqslant 5$
4. $2 \ln(x) - 4 \leqslant 3 \ln(x)$

Exercice 12

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

1. $3 \ln(x) - 2$
2. $-5 \ln(x) + 2$
3. $x \ln(x) - 5x$
4. $\frac{\ln(x)}{x}$

Exercice 13

Donner le domaine de validité puis résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $\ln(x + 2) + \ln(3x - 3) = 0$
2. $\ln(x) + \ln(x - 3) < 2 \ln(2)$

Exercice 14

Dresser le tableau de variations sur \mathbb{R} des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x - 3x$
2. $g(x) = e^{-3x} + 5x + 2$

Exercice 15

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1,5^n$. Déterminer le plus petit rang à partir duquel tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 100.
2. Soit (v_n) la suite définie par $u_n = 0,75^n$. Déterminer le plus petit rang à partir duquel tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à 0,01.

Exercice 16

En étudiant la croissance d'un bambou de taille initiale un mètre, on s'est aperçu que l'on pouvait modéliser sa taille en centimètres, au bout de n mois, par la suite (u_n) telle que $u_n = 500 \times 1,05^n - 400$.

1. Compléter le fonction bambou ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre de mois nécessaires à ce bambou pour qu'il atteigne ou dépasse 10 mètres.

```
def bambou():
    n = 0
    while ....:
        ...
    return ...
```

2. Résoudre une inéquation pour savoir combien de mois seront nécessaires pour que ce bambou dépasse 10 mètres.

Exercice 17

On tire successivement et avec remise n boules d'une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. Combien faut-il effectuer au minimum de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit supérieure à 0,99 ?

Limites de la fonction logarithme

Exercice 18

Déterminer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{3x}$$

2.
$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{3}}} \ln(1 - 3x)$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + 2}{3x + 1}\right)$$

4.
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(e^x - 1)$$

Exercice 19

Déterminer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x^2$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 1}$$

Exercice 20

Déterminer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 1}$$

2.
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(\sqrt{x})$$

3.
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} + \ln(x)$$

4.
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^x - 1) \ln(e^x - 1)$$

Fonctions composées avec du logarithme

Exercice 21

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de f :

1. $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

2. $f(x) = \ln(2 - \cos(x))$

3. $f(x) = x \ln(x^2 + 3e^x)$

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x + 1}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
2. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.