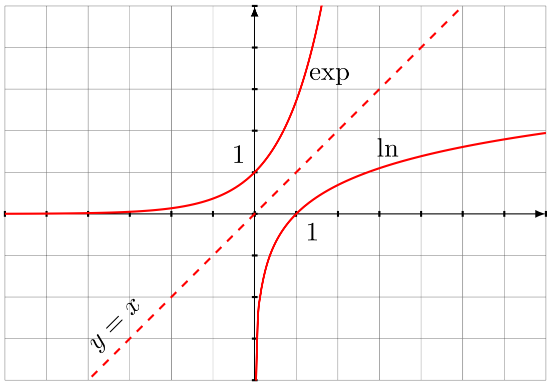
Fonction logarithme

I Logarithme népérien

1. Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Proposition I.1

- Soit $a > 0$. L'équation $\mathrm{e}^x = a$ possède une unique solution qu'on appelle **logarithme népérien** de a et qu'on note $\ln(a)$.
- La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à $x > 0$ associe $\ln(x)$.
- Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Proposition I.2

1. Pour tout réel a et tout $b > 0$, $b = \mathrm{e}^a \iff a = \ln(b)$.
2. Pour tout réel a, $\ln(\mathrm{e}^a) = a$
3. Pour tout réel $b > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(b)} = b$
4. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.1 — Résoudre les équations suivantes :
1. $\mathrm{e}^x = 4$ 2. $\ln(x) = -3$ 3. $\mathrm{e}^x = -2$ → À rédiger

2. Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Théorème I.3 (Relation fonctionnelle)

Pour tout $a > 0$, pour tout $b > 0$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.2 — 1. Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$:
$A = \ln(6)$ et $B = \ln(24)$.
2. Écrire les expressions suivantes sous la forme $\ln(a)$ où a est un réel :
$C = \ln(3) + \ln(5)$ et $D = \ln(2) + \ln(7) + \ln(11)$. → À rédiger

Corollaire I.4

Pour tous nombres $a > 0$ et $b > 0$,

- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ ($n \in \mathbb{N}$)
- $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Exemple I.3 — Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants :
1. $A = \ln(\frac{\mathrm{e}^2}{8})$ 2. $B = \mathrm{e}^{-\ln(2)} + \ln(2\mathrm{e})$ 3. $C = \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \ln(\frac{1}{4})$ → À rédiger

II Étude de la fonction logarithme népérien

1. Limites aux bornes

Proposition II.1

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

Démonstration. → À rédiger

2. Dérivée et sens de variation

Proposition II.2

La fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration. → À rédiger

Proposition II.3

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Ainsi,

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

x	0	1	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$

Remarque — D'après le tableau de variations, $\ln(x) > 0 \iff x > 1$ et $\ln(x) < 0 \iff x < 1$.

Exemple II.1 — Résoudre les inéquations suivantes :
1. $e^{3x-2} < 5$ 2. $\ln(x-2) \geqslant 2\ln(2)$ → À rédiger

Exemple II.2 — Déterminer le sens de variations des fonctions f et g suivantes :
1. $f(x) = 3\ln(x) - x$ sur $I =]0; +\infty[$ 2. $g(x) = e^{4x} - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$ → À rédiger

III Compléments sur la fonction logarithme

1. Croissances comparées

Théorème III.1

Pour tout entier naturel n,

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$

Démonstration. (pour $n = 1$)

Exemple III.1 — Déterminer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\ln(x) - 2x^2$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} (2x^2 - 3x)\ln(x)$ → À rédiger

2. Fonction composée avec le logarithme

Proposition III.2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que $u > 0$ sur I alors $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple III.2 — Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(1 + e^{2x}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}$. → À rédiger

Solutions

Proposition I.2

1. Cela vient de la définition de $\ln(b)$ comme l'unique nombre a tel que $b = \mathrm{e}^a$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^a)$ est l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$. Or, cette équation a pour solution $x = a$ donc, par unicité, $\ln(\mathrm{e}^a) = a$
3. Pour tout $b > 0$, $\ln(b)$ est par définition solution de l'équation $\mathrm{e}^x = b$ donc on a bien $\mathrm{e}^{\ln(b)} = b$.
4. $\ln(1) = \ln(\mathrm{e}^0) = 0$ d'après 2.
   D'autre part, $\ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^1) = 1$ d'après 2.

Exemple I.1

1. $\mathrm{e}^x = 4 \iff x = \ln(4)$
2. $\ln(x) = -3 \iff x = \mathrm{e}^{-3}$
3. $\mathrm{e}^x = -2$ n'a pas de solution car $\mathrm{e}^x > 0$. L'écriture $\ln(-2)$ n'aurait pas de sens ici.

Théorème I.3

D'un part, $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = a \times b$.
D'autre part, $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = a \times b$.
On en déduit que $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$ donc $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exemple I.2

1. $A = \ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3)$
   $B = \ln(24) = \ln(2 \times 2 \times 2 \times 3) = \ln(2) + \ln(2) + \ln(2) + \ln(3) = 3\ln(2) + \ln(3)$
2. $C = \ln(3) + \ln(5) = \ln(3 \times 5) = \ln(15)$
   $D = \ln(2)+\ln(7)+\ln(11) = \ln(2\times 7\times 11) = \ln(154)$

Exemple I.3

1. $A = \ln(\mathrm{e}^2) - \ln(8) = 2\ln(\mathrm{e}) - \ln(2^3) = 2 \times 1 - 3\ln(2) = 2 - \ln(3)$
2. $B = \mathrm{e}^{-\ln(2)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(2)}} + \ln(2) + \ln(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{2} + \ln(2) + 1 = \dfrac{3}{2} + \ln(2)$
3. $C = \ln(\sqrt{2}) - \ln(2) - \ln(4) = \dfrac{1}{2}\ln(2) - \ln(2) - 2\ln(2) = \dfrac{-5}{2}\ln(2)$

Proposition II.1

- Soit A un réel. $\ln(x) \geqslant A \iff \mathrm{e}^{\ln(x)} \geqslant \mathrm{e}^A \iff x \geqslant \mathrm{e}^A$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Ainsi, dès que x est assez grand, tous les $\ln(x)$ sont dans l'intervalle $[A;+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Comme $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc, par composée des limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

Proposition II.2

On admet que la fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$. Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x)\mathrm{e}^{\ln(x)}$
Or, $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ donc $f'(x) = 1$. On en déduit que $\ln(x)\mathrm{e}^{\ln(x)} = 1$ donc $\ln'(x) \times x = 1$ d'où $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemple II.1

1. $\mathrm{e}^{3x-2} < 5 \iff \ln(\mathrm{e}^{3x-2}) < \ln(5) \iff 3x - 2 < \ln(5) \iff x < \dfrac{\ln(5)+2}{3}$
2. L'inéquation n'est définie que si $x - 2 > 0$ c'est-à-dire si $x > 2$.
   $\ln(x-2) \geqslant 2\ln(2) \iff \ln(x-2) \geqslant \ln(4) \iff x - 2 \geqslant 4 \iff x \geqslant 6$.

Exemple II.2

1. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{3-x}{x}$.

x	0		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	
x	0	$+$			
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

2. Pour tout réel x, $g'(x) = 4\mathrm{e}^{4x} - 2$.
   $g'(x) \geqslant 0 \iff 4\mathrm{e}^{4x} - 2 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{4x} \geqslant \dfrac{1}{2} \iff 4x \geqslant \ln(1/2) \iff 4x \geqslant -\ln(2) \iff x \geqslant \dfrac{-\ln(2)}{4}$

x	$-\infty$		$\dfrac{-\ln(2)}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Théorème III.1

- Pour tout $x > 0$, $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{\ln(x)}}$.
  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$ donc, par composée des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
- Pour tout réel $x > 0$, $x\ln(x) = -x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\ln\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\dfrac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ donc, par composée des limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\dfrac{\ln\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\dfrac{1}{x}} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$.

Exemple III.1

1. $3\ln(x) - 2x^2 = x^2\left(3 \times \dfrac{\ln(x)}{x^2} - 2\right)$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} - 2 = -2$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\ln(x) - 2x^2 = -\infty$.
2. $(2x^2 - 3x)\ln(x) = 2x^2\ln(x) - 3x\ln(x)$.
   Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$, donc, par somme des limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2x^2 - 3x)\ln(x) = 0$.

Exemple III.2

Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{0 + 2\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}} > 0$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Fonction logarithme

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer des écritures
- Savoir dériver une fonction contenant du logarithme
- Connaître le sens de variations, les limites de la fonction $\ln$
- Savoir résoudre des équations ou inéquations avec du logarithme ou de l'exponentielle
- Connaître les croissances comparées et savoir les utiliser pour calculer des limites
- Connaître et savoir utiliser la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

Fonction logarithme

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer des écritures
- Savoir dériver une fonction contenant du logarithme
- Connaître le sens de variations, les limites de la fonction $\ln$
- Savoir résoudre des équations ou inéquations avec du logarithme ou de l'exponentielle
- Connaître les croissances comparées et savoir les utiliser pour calculer des limites
- Connaître et savoir utiliser la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

Fonction logarithme

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer des écritures
- Savoir dériver une fonction contenant du logarithme
- Connaître le sens de variations, les limites de la fonction $\ln$
- Savoir résoudre des équations ou inéquations avec du logarithme ou de l'exponentielle
- Connaître les croissances comparées et savoir les utiliser pour calculer des limites
- Connaître et savoir utiliser la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$