

Logarithme népérien d'un nombre strictement positif

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $e^x = 1$, $e^x = 0$, $e^x = -2$ et $e^x = e$.
2. Rappeler le sens de variation de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ puis justifier que l'équation $e^x = 2$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. Compléter la fonction `solution` ci-dessous afin que l'appel de cette fonction renvoie une valeur approchée de la solution de l'équation $e^x = 2$ avec la précision voulue. Donner ensuite un encadrement de cette solution à 10^{-2} près.

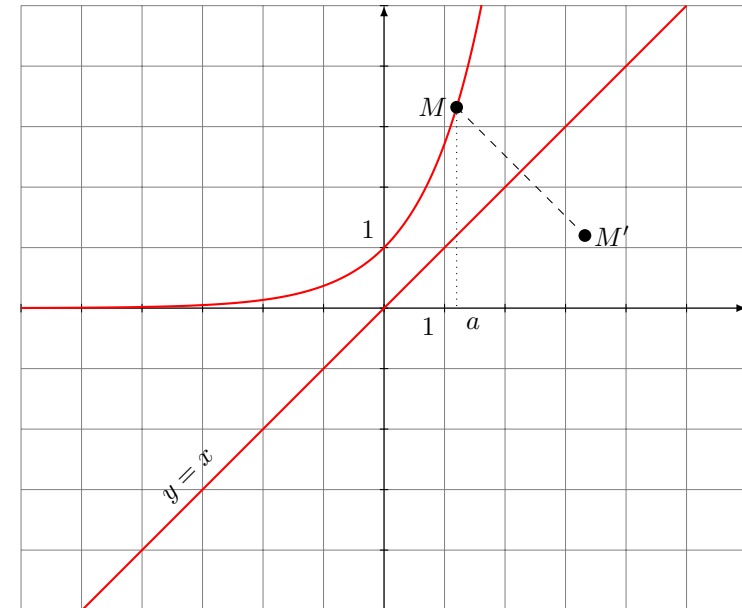
```
import math

def solution(precision):
    reponse = 0
    while math.exp(reponse) ..... :
        reponse = reponse + precision
    return reponse
```

4. Montrer que pour tout $a > 0$ l'équation $e^x = a$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$. Cette solution se note $\ln(a)$ et s'appelle le logarithme népérien de a .
5. Modifier la fonction `solution` pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 0,01 près de la solution de l'équation $e^x = a$, pour une valeur de a donnée en paramètre.
6. Démontrer la relation $\ln(e^a) = a$ pour tout $a > 0$.

Représentation graphique de la fonction $\ln$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction exponentielle. Le point M d'abscisse le nombre a est situé sur la courbe de cette fonction.



1. Quelles sont les coordonnées de M ?
2. On note M' le point de coordonnées $(e^a; a)$ et d la droite d'équation $y = \ln(x)$.
 - (a) Justifier que le point M' appartient à la courbe d'équation $y = \ln(x)$.
 - (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, puis, en utilisant un vecteur directeur de d , montrer que $d \perp (MM')$.
 - (c) Montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à la droite d .
 - (d) Que peut-on en déduire pour les points M et M' par rapport à d ?
3. Construire la courbe de la fonction $\ln$ sur le schéma en utilisant ce qui vient d'être démontré.