

L’algorithme de Briggs

Le logarithme décimal d’un nombre réel x strictement positif est le nombre noté $\log(x)$ égal à $\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. En 1624, Henry Briggs, dans son oeuvre *Arithmetica Logarithmica*, calcula à la main le logarithme décimal de 30 000 entiers (de 1 à 20 000 et de 90 001 à 100 000) avec 14 décimales.

L’algorithme de Briggs expliqué par Euler

Dans l’introduction à l’analyse infinitésimale (1748), Euler explique la méthode de Briggs pour calculer une valeur approchée de $\log(5)$. Voici ses calculs :

$A = 1,000000;$	$\ell A = 0,000000$	soit	$N = 4,997242;$	$\ell N = 0,6987304;$	$O = \sqrt{KN}$
$B = 10,000000;$	$\ell B = 1,000000$		$O = 5,000052;$	$\ell O = 0,6989745;$	$P = \sqrt{NO}$
$C = 3,162177;$	$\ell C = 0,500000$	$C = \sqrt{AB}$	$P = 4,998647;$	$\ell P = 0,6988525;$	$Q = \sqrt{OP}$
$D = 5,623413;$	$\ell D = 0,750000$	$E = \sqrt{CD}$	$Q = 4,999350;$	$\ell Q = 0,6989135;$	$R = \sqrt{OQ}$
$E = 4,216964;$	$\ell E = 0,625000$	$F = \sqrt{DE}$	$R = 4,999701;$	$\ell R = 0,6989440;$	$S = \sqrt{OR}$
$F = 4,869674;$	$\ell F = 0,687500$	$G = \sqrt{DF}$	$S = 4,999876;$	$\ell S = 0,6989592;$	$T = \sqrt{OS}$
$G = 5,232991;$	$\ell G = 0,718750$	$H = \sqrt{FG}$	$T = 4,999963;$	$\ell T = 0,6989668;$	$V = \sqrt{OT}$
$H = 5,048065;$	$\ell H = 0,703125$	$I = \sqrt{FH}$	$V = 5,000008;$	$\ell V = 0,6989707;$	$W = \sqrt{TV}$
$I = 4,958069;$	$\ell I = 0,693125$	$K = \sqrt{HI}$	$W = 4,999984;$	$\ell W = 0,6989687;$	$X = \sqrt{WV}$
$K = 5,001865;$	$\ell K = 0,699187$	$L = \sqrt{IK}$	$X = 4,999997;$	$\ell X = 0,6989697;$	$Y = \sqrt{VX}$
$L = 4,980416;$	$\ell L = 0,6971656;$	$M = \sqrt{KL}$	$Y = 5,000003;$	$\ell Y = 0,6989702;$	$Z = \sqrt{XY}$
$M = 4,991627;$	$\ell M = 0,6981411;$	$N = \sqrt{KM}$	$Z = 5,000000;$	$\ell Z = 0,6989700;$	

La colonne de gauche est initialisée à $A = 1$ et $B = 10$. La colonne de droite par $\ell A = \log(1)$ et $\ell B = \log(10)$. La méthode de Briggs s’appuie sur la relation que l’on écrit de nos jours $\log(\sqrt{AB}) = \frac{1}{2}(\log(A) + \log(B))$.

Dans la colonne de gauche, $C = \sqrt{AB}$ et dans la colonne de droite $\ell C = \frac{1}{2}(\ell A + \ell B)$.

1. Vérifier les valeurs de C et ℓC .

On donne ci-dessous l’algorithme de Briggs pour calculer $\log(x)$ où x désigne un nombre entier naturel tel que $1 < x < 10$.

Tant que $|B - x| > 10^{-5}$

Si $\sqrt{AB} \leq x$ alors

$A \leftarrow \sqrt{AB}$ $\ell A \leftarrow \frac{\ell A + \ell B}{2}$

Sinon

$B \leftarrow \sqrt{AB}$ $\ell B \leftarrow \frac{\ell A + \ell B}{2}$

Fin Si

Fin Tant que

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en exécutant l’algorithme pas à pas avec $x = 5$.

A	B	ℓA	ℓB	$\sqrt{AB}$	$ B - x > 10^{-5}?$
1	10	0	1	3,162277	Faux

3. Vérifier avec une calculatrice les valeurs de D et de E obtenues par Euler.

Une fonction en langage Python

5. Ecrire en langage Python une fonction `briggs`, de paramètres `x` et `p` où `p` est l’entier naturel non nul de la condition $|B - x| > 10^{-p}$.
6. Exécuter l’instruction `briggs(5,7)` et comparer à la valeur ℓZ obtenue par Euler.
7. Utiliser cette fonction pour déterminer une valeur approchée à 10^{-14} près de $\log(62)$. Pour cela, on initialisera avec $A = 10$, $B = 100$, $\ell A = 1$ et $\ell B = 2$.