 Orthogonalité dans l'espace — Sujets de bac

Bac – Centres étrangers 9 juin 2021

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$\text{A}(2\,;\,-1\,;\,0),\text{B}(3\,;\,-1\,;\,2),\text{C}(0\,;\,4\,;\,1)\ \text{ et S}(0\,;\,1\,;\,4).$$

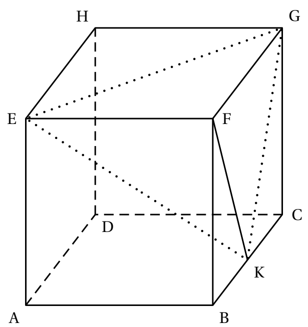
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
   (b) Montrer que les coordonnées du point H sont H(2; 2; 3).
4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
   Calculer le volume du tétraèdre SABC.
5. (a) Calculer la longueur SA.
   (b) On indique que SB $= \sqrt{17}$.
   En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ approchée au dixième de degré.

Bac – Métropole 12 mai 2022 – Jour 2

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

Bac – Asie 18 mai 2022 – Jour 2

Dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$\text{A}(-3\,;\,1\,;\,3),\text{B}(2\,;\,2\,;\,3),\ \text{C}(1\,;\,7\,;\,-1),\ \text{D}(-4\,;\,6\,;\,-1)\text{ et K}(-3\,;\,14\,;\,14).$$

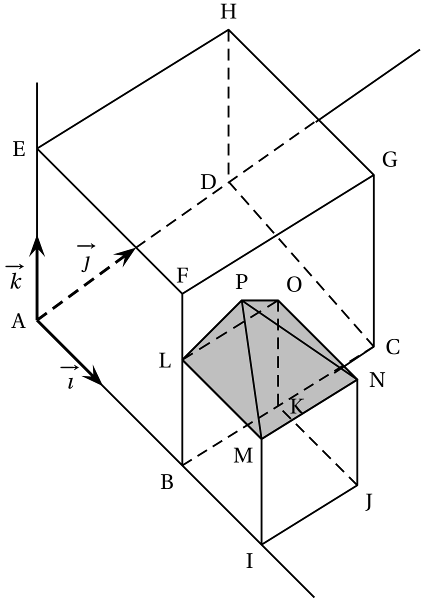
1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$.
   (b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
   (c) Calculer l'aire du rectangle ABCD.
2. (a) Justifier que les points A, B et D définissent un plan.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(-2\,;\,10\,;\,13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
3. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
   (b) Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
   (c) Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.
4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

 Orthogonalité dans l'espace — Sujets de bac

Bac – Centres étrangers 14 mars 2023 – Jour 2

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, avec $\vec{\imath} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\vec{k} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

1. (a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\right)$.
3. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PN}}$.
   (b) Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
   (c) Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{\mathrm{MPN}}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?
4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

Bac – Centres étrangers 12 mai 2022 – Jour 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}(3\ ;\ -2\ ;\ 2),\quad \mathrm{B}(6\ ;\ 1\ ;\ 5),\quad \mathrm{C}(6\ ;\ -2\ ;\ -1)\quad \text{et } \mathrm{D}(0\ ;\ 4\ ;\ -1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times h$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   (b) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
   (c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point H(5 ; 0 ; 1).
   (a) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.
   (b) Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   (c) En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.