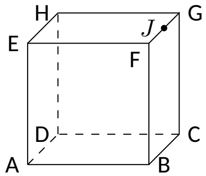
Produit scalaire dans l'espace

Exercice 1
Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 3. J est le milieu de $[FG]$.



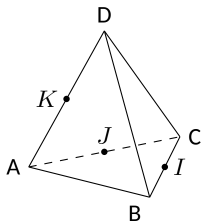
Déterminer chaque produit scalaire :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH}$
4. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$
6. $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{FA}$
7. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EH}$

Exercice 2
$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1.

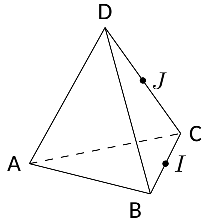
1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$.
2. Utiliser la décomposition $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF}$ pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF}$.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (chaque face est un triangle équilatéral) de côté a. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AD]$.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. (a) Justifier que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Exercice 4
$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 6. I et J sont les milieux des arêtes $[BC]$ et $[CD]$.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ ainsi que les distances AI et AJ.
2. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en utilisant les égalités $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$ en degrés. Arrondir au dixième.

Formules de polarisation

Exercice 5
Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $AB = 7$, $AC = 8$ et $BC = 5$.

1. (a) À l'aide d'une formule de polarisation, montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(BC^2 - AB^2 - AC^2\right)$.
   (b) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis celle de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés.

Exercice 6
$ABCD$ est un parallélogramme de l'espace tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $DB = 7$.

1. Justifier que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.
2. À l'aide d'une formule de polarisation, déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$.
3. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en degrés. Arrondir au dixième.

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Exercice 7
Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé.
2. Montrer que les vecteurs diagonaux $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 8
On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 3/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 4 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$

Exercice 9
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3; 1; 5)$, $B(3; 5; 1)$ et $C(-1; 5; 5)$. Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir au centième si besoin.

Exercice 10
Soit $ABCDEFGH$ un cube. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Soit I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[EH]$ et $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en I.
3. En déduire l'aire du triangle IJK.

Exercice 11
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python afin qu'elle renvoie le produit scalaire de deux vecteurs `u` et `v` donnés en paramètres sous forme de listes.

```
def pscalaire(u,v):
    L = [ u[i] * v[i] for i in range(.......)]
    ps = 0
    for i in range(......):
        ps = ......
    return ......
```

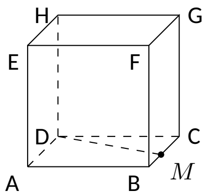
2. À l'aide de la fonction `pscalaire`, écrire une fonction `orthogonaux` qui renvoie un booléen indiquant si deux vecteurs `u` et `v` donnés en paramètres sous forme de listes sont orthogonaux.
3. À l'aide de la fonction `pscalaire`, écrire une fonction `norme` qui renvoie la norme d'un vecteur `u` donné en paramètre sous forme d'une liste.

Orthogonalité de droites et de plans

Exercice 12
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(7;-1;8)$, $B(10;3;6)$, $C(1;-2;6)$ et $D(-5;2;5)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice 13
Dans un repère orthonormé, on considère les droites d et d' dont des équations paramétriques sont les suivantes :
$d : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1-3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 1+t \end{cases}$ et $d' : \begin{cases} x = -1+k \\ y = 3+2k \quad (k\in\mathbb{R}) \\ z = 2+4k \end{cases}$
Montrer que les droites d et d' sont orthogonales.

Exercice 14
$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point de l'arête $[BC]$.



1. Démontrer que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).
2. En déduire que la droite (FB) est orthogonale à la droite (DM).

Exercice 15
On considère un cube $ABCDEFGH$.
1. Justifier que la droite (FH) est perpendiculaire à la droite (EG).
2. (a) Démontrer que $\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{GC} = 0$.
   (b) Que peut-on en déduire ?
3. Justifier que la droite (FH) est orthogonale au plan (EGC).

Vecteur normal

Exercice 16
Dans un repère orthonormé, on donne les points suivants : $A(3;-1;4)$, $B(0;5;1)$ et $C(0;-1;-1)$.
1. Montrer que A, B et C forment bien un plan
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan ABC.

Exercice 17
Dans un repère orthonormé, on donne les points suivants : $A(0;1;-1)$, $B(3;-2;0)$ et $C(-3;-2;2)$. On admet que A, B et C ne sont pas alignés et qu'ils forment bel et bien un plan. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Projeté orthogonal d'un point

Exercice 18
L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère les points $B(-1;17;-17)$, $C(5;11;-5)$ et $M(-9;5;-1)$.
1. Justifier que C est le projeté orthogonal de M sur la droite (BC).
2. En déduire la distance du point M à la droite (BC).

Exercice 19
$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. L, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$. K est le centre du carré $BCDGF$. On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
1. Montrer que $\overrightarrow{LK}$ est normal au plan (IJB).
2. Soit M le projeté orthogonal de L sur le plan (IJB).
   (a) Montrer que $LM = \dfrac{|\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{LK}|}{LK}$.
   (b) En déduire la distance du point L au plant (IJB).

Équations cartésiennes

Exercice 20
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(9;3;1)$, $B(-11;7;5)$ et $C(5;8;3)$.
1. Vérifier que A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Le point $D(5;-20;-5)$ appartient-il au plan (ABC) ?

Exercice 21
Le plan médiateur d'un segment est le plan orthogonal à ce segment passant par son milieu. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1;3;-5)$ et $B(1;1;1)$. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$.

Exercice 22
Dans un repère orthonormé, on considère les plan P et P' dont des équations cartésiennes sont : $P : 3x-y+4z+1=0$ et $P' : -4,5x+1,5y-6z-3=0$. Montrer que les plans P et P' sont strictement parallèles.

Exercice 23
Soit $A(2;0;2)$ et $B(0;2;-2)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+3y+z-5=0$.
1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).
2. Montrer que la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point.
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 24
Dans un repère orthonormé, on considère le plan P d'équation cartésienne $P : 2x+y-z-4=0$ et la droite d dont une équation paramétrique est $d : \begin{cases} x = 1-3t \\ y = 1-1,5t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = -1+1,5t \end{cases}$. Montrer que d est orthogonale à P.

Exercice 25
Soit P le plan d'équation $2x-5y+3z-7=0$ et d la droite définie par la représentation paramétrique suivante :
$d : \begin{cases} x = 5+4t \\ y = 2+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 9-t \end{cases}$. Montrer que d est strictement parallèle au plan P.

Exercice 26
Déterminer la distance entre le point $A(-6;2;-1)$ et le plan P d'équation cartésienne $P : -5x+y-z-6=0$.

Exercice 27
Déterminer la distance entre le point $A(2;-1;2)$ et la droite d dont une représentation paramétrique est $d : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = -1+t \end{cases}$.