Bac ES – Nouvelle-Calédonie Mars 2014

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [2; 5] par $f(x) = (3-x)\mathrm{e}^x + 1$, soit f' sa fonction dérivée et soit f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2\,;\,5]$, $f'(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;\,5]$. Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
4. (a) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3. Montrer que T a pour équation $y = -\mathrm{e}^3 x + 3\mathrm{e}^3 + 1$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
   (c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.
   (d) En déduire que : $\alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.
   On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} < 3,05$.
5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b

   (a) Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2							
étape 3							

   (b) Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

Continuité — Sujets de bac

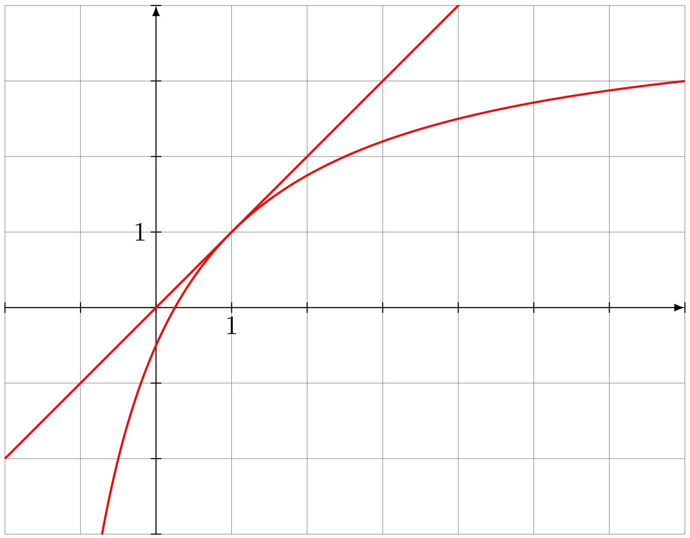
Bac S – Métropole Septembre 2010

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.
   (b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).



Continuité — Sujets de bac

d'après Bac S – Centres Etrangers 2007

On souhaite démontrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ et construire une suite qui converge vers cette solution.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $f(x) = 0$.
2. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{xe^x - 1}{e^x}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (c) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 + e^{-x}$.
   (d) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α.
   (f) Justifier que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
   (g) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
   (h) Quel est le signe de f sur $[0; \alpha]$?

Partie B

On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \dfrac{1 + x}{1 + e^x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) = \dfrac{-e^x f(x)}{(1 + e^x)^2}$.
2. En déduire que la fonction g est croissante sur $[0; \alpha]$.

Partie C

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. En admettant le fait que $g(\alpha) = \alpha$, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ.
3. Justifier que $g(\ell) = \ell$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = x$ est équivalente à $f(x) = 0$ puis en déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.