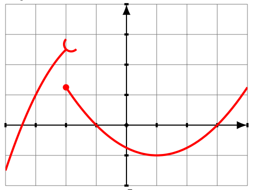
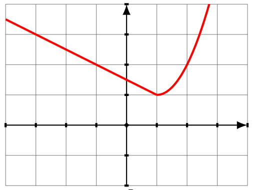
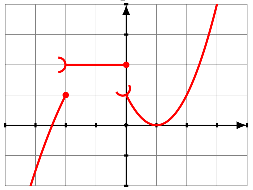
Fonctions continues sur un intervalle

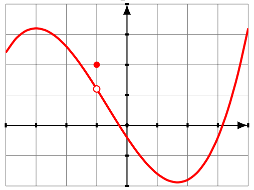
Exercice 1

On donne ci-dessous le graphe de quatre fonctions définies sur $[-4;4]$. Pour chacune des fonctions, indiquer les intervalles sur lesquels elle est continue.

1. 

2. 

3. 

4. 

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1-2x \text{ si } x \geqslant 2 \\ \mathrm{e}^{x-2} - 4 \text{ si } x < 2 \end{cases}$.

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$.
2. Étudier la continuité de f en 2.
3. Conclure pour la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit m un réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m \text{ si } x < 1 \\ 2x+1 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Pour quelle valeur de m la fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[-1;3]$ par

$f(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - 8x^2 - 3$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-1;3]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution α sur $[-1;3]$.
3. Déterminer à la calculatrice un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2;2]$.
2. (a) Montrer que f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.
   (c) Déterminer une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près.

Exercice 6

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		1		6		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	5

Soit m un nombre réel. Discuter, suivant les valeurs de m, du nombre de solutions de l'équations $f(x) = m$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;1]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0;1]$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. On considère l'algorithme suivant :

   $a \leftarrow 0$
   $b \leftarrow 1$
   Tant que $b - a > 10^{-1}$
   | $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
   | Si $f(m) > 0$
   | | $b \leftarrow m$
   | Sinon
   | | $a \leftarrow m$
   Fin Tant que
   Afficher a et b

   (a) Que va afficher cet algorithme lorsqu'on l'exécute ? Pour répondre à cette question, on pourra remplir un tableau.
   (b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 8

On donne le programme suivant écrit en langage Python :

```
import math

def f(x):
    return math.exp(x) - 2

def encadrement(a,b,precision):
    while b-a > precision:
        m = (a+b)/2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a,b
```

1. À quel problème permet de répondre ce programme ?
2. Expliquer le rôle de l'instruction `if f(a) * f(m) <= 0`.

Exercice 9

On considère les fonctions f et g définies sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g dans un repère orthogonal.

1. À l'aide d'une calculatire, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Montrer que pour tout réel $x > 1$,
   $f(x) - g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x-1}$.
3. On pose $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ pour $x \in]1;+\infty[$.
   (a) Dresser le tableau de variations de h sur $]1;+\infty[$.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α sur $]1;+\infty[$.
   (c) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Continuité et suites

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{1}{2\pi n}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Si la fonction f était continue en 0, quelle vaudrait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$?
4. En déduire que f n'est pas continue en 0.

Exercice 11
Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;1]$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   (b) Que peut-on en déduire pour cette suite ?
   (c) Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 12
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=4$ et, pour tout entier naturel n, $u_n=3-\dfrac{4}{u_n+1}$.

1. (a) Écrire en langage Python une fonction `u` qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) En exécutant le programme précédent, on obtient le tableau de valeurs suivant :

n	5	10	50	100	1000
u_n	$1,353$	$1,188$	$1,039$	$1,020$	$1,002$

   Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que la fonction f définie par $f(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   (c) Montrer que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.