CHAPITRE 8

Continuité

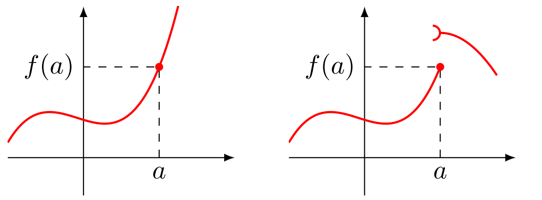
I Fonctions continues

1. Continuité d'une fonction

Définition I.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

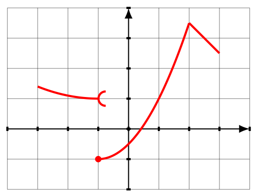
- On dit que f est **continue** en a si, et seulement si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue** sur I si, f est continue en tout point a de l'intervalle I.



f est continue en a $\quad$ f n'est pas continue en a

Remarque — Dire qu'une fonction est continue sur un intervalle I revient à dire qu'on peut tracer son graphe sur cet intervalle « sans lever le crayon ».

Exemple I.1 — On donne ci-contre le graphe d'une fonction définie sur $[-3;3]$. Dire sur quel(s) intervalle(s) cette fonction est continue. → À rédiger



Exemple I.2 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 3x+4 \text{ si } x \leqslant 0 \\ (3x-2)^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue en 0. → À rédiger

2. Continuité des fonctions usuelles

Proposition I.2

- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle, la fonction racine carrée et la fonction valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemple I.3 — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} -x^2-2x \text{ si } x \leqslant -1 \\ 2+xe^{x+1} \text{ si } x > -1 \end{cases}$.

1. Justifier que g est continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.
2. Étudier la continuité de g en -1.
3. Que peut-on en déduire ? → À rédiger

3. Dérivabilité et continuité

Proposition I.3

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque — La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point a sans pour autant être dérivable en a. C'est le cas de la fonction racine carrée qui est continue en 0 mais qui n'est pas dérivable en 0.

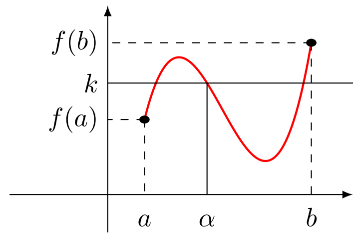
Exemple I.4 — Justifier que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. → À rédiger

II Théorème des valeurs intermédiaires

1. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème II.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = k$.



Remarque — Ce théorème dit que si f est continue sur $[a, b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution sur $[a, b]$.

Exemple II.1 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 14$. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1; 4]$. $\longrightarrow$ À rédiger

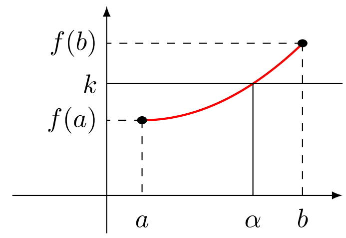
2. Cas des fonctions continues strictement monotones

Corollaire II.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et k un réel. On suppose que :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est strictement monotone sur $[a, b]$
- k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

alors l'équation $f(x) = k$ possède une **unique** solution α sur $[a, b]$.



x	a	α	b
f	$f(a)$	$\nearrow$ k $\nearrow$	$f(b)$

Remarque — On peut également appliquer ce théorème dans le cas d'un intervalle du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$. On remplace alors le calcul de $f(a)$ ou $f(b)$ par le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Exemple II.2 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur l'intervalle $[-1; 1]$ puis, à l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de cette solution à 10^{-3} près. $\longrightarrow$ À rédiger

3. Algorithme de dichotomie

Exemple II.3 — On admet que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$. On donne l'algorithme ci-contre, dit algorithme de dichotomie, qui permet d'obtenir un encadrement de α à 10^{-1} près.

1. Que contiennent les variables a et b à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Pour répondre à cette question, on complétera le tableau suivant en ajoutant éventuellement des lignes :

a	b	$b-a$	m	$f(m)$
0	1	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

2. En déduire un encadrement de α à $0,1$ près. $\longrightarrow$ À rédiger

```
a ← 0
b ← 1
Tant que b − a > 10^(−1)
    m ← (a + b)/2
    Si f(m) > 0
        a ← m
    Sinon
        b ← m
Fin Tant que
```

III Fonctions continues et suites convergentes

1. Image d'une suite convergente par une fonction continue

Proposition III.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit (u_n) une suite à valeurs dans I.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ de I alors $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

Exemple III.1 — Déterminer la limite de la suite (v_n) dans chaque cas :

1. $v_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$
2. $v_n = \sqrt{\frac{1}{n} + 1}$

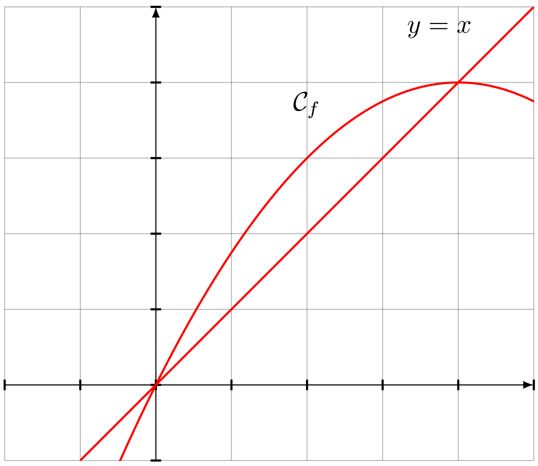
$\longrightarrow$ À rédiger

2. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Proposition III.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ vérifie l'égalité $\ell = f(\ell)$.

Exemple III.2 — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,25x(x-8)$. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$.



1. Calculer u_1.
2. Sans faire aucun calcul, placer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses en laissant les traits de construction apparents.
3. Montrer que f est croissante sur $[1;4]$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
5. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ puis déterminer sa limite.

$\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1
Cette fonction est continue sur $[-3; -1[$ et sur $]-1; 3]$. Cette fonction n'est pas continue en -1.

Exemple I.2
Tout d'abord, $f(0) = 3 \times 0 + 4 = 4$.
Limite en 0 à gauche :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 3x + 4 = 4$
Limite en 0 à droite :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (3x - 2)^2 = (-2)^2 = 4$
Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$, la fonction f est bien continue en 0.

Exemple I.3
1. g est continue sur $]-\infty; -1[$ car c'est un un polynôme sur cet intervalle. De même, g est continue sur $]-1; +\infty[$ en tant que somme, produit et composée de fonctions continues sur cet intervalle.
2. $g(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = 0$
   Limite en -1 à gauche :
   $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} -x^2 - 2x = 0$
   Limite en -1 à droite :
   $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 2 + x\mathrm{e}^{x+1} = 2 + (-1)$-1+1 $= 2 - 1 = 1$
   Comme $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x)$, la fonction g n'est pas continue en -1.
3. On en déduit que g est continue sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

Exemple I.4
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple II.1
La fonction f est continue sur $[1; 4]$. De plus, 1 est compris entre $f(1) = -1$ et $f(4) = 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ possède au moins une solution sur $[1; 4]$.

Exemple II.2
Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ donc ce trinôme possède deux racines : $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	0
f	$\frac{14}{3}$	$\searrow$	$\frac{-2}{3}$

On constate donc que :

- f est continue sur $[-1, 1]$ car c'est un polynôme
- f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$
- 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(1)$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ possède donc une unique solution α sur $[-1, 1]$. A la calculatrice, on trouve $-0,305 < \alpha - 0,304$.

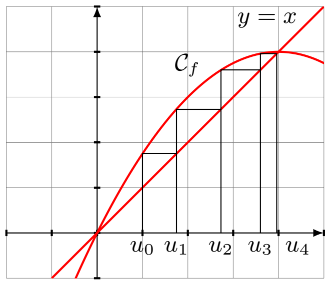
Exemple II.3
1. On a le tableau suivant :

a	b	$b - a$	m	$f(m)$
0	1	1	$0,5$	$-0,375$
0	$0,5$	$0,5$	$0,25$	$\approx 0,27$
$0,25$	$0,5$	$0,25$	$0,375$	$\approx -0,07$
$0,25$	$0,375$	$0,125$	$0,3125$	$\approx 0,09$
$0,3125$	$0,375$			

2. On en déduit que $0,3 < \alpha < 0,4$.

Exemple III.1
1. $v_n = f(u_n)$ avec $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \mathrm{e}^0 = 1$.
2. $v_n = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{1} = 1$.

Exemple III.2
1. $u_1 = f(u_0) = -0,25 \times 1 \times (1 - 8) = 1,75$
2. On a la représentation suivante :



3. Pour tout réel $x \in [1; 4]$, $f(x) = -0,25x^2 + 2x$ donc $f'(x) = -0,5x + 2$.
   Or, $-0,5x + 2 \geqslant 0 \iff 2 \geqslant 0,5x \iff 4 \geqslant x$ donc on a le tableau suivant :

x	1		4
$f'(x)$		$+$	0
f	$1,75$	$\nearrow$	4

   La fonction f est bien croissante sur $[1; 4]$.
4. Montrer par récurrence le résultat.
   Initialisation. Si $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,75$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$.
   Hérédité. Soit n un entier naturel. On suppose que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.
   Comme $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
   alors $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$ (car f est croissante sur $[1; 4]$).
   Ainsi, $1,75 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$
   On a donc bien $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$. L'hérédité est donc vérifiée.
5. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 4 donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est continue sur $[1; 4]$, alors $\ell = f(\ell)$.
   Autement dit, $\ell = -0,25\ell^2 + 2\ell$ c'est-à-dire $0,25\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(0,25\ell - 1) = 0$.
   On en déduit que $\ell = 0$ ou $0,25\ell - 1 = 0 \iff \ell = \dfrac{1}{0,25} = 4$.
   Comme (u_n) est minorée par 1, sa limite ne peut pas être 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

Continuité

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la définition d'une fonction continue en un point ou sur un intervalle
- Savoir montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ possède une unique solution
- Savoir déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la solution d'une équation du type $f(x) = k$
- Savoir appliquer l'algorithme de dichotomie
- Savoir représenter graphiquement une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue
- Savoir étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue

Continuité

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la définition d'une fonction continue en un point ou sur un intervalle
- Savoir montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ possède une unique solution
- Savoir déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la solution d'une équation du type $f(x) = k$
- Savoir appliquer l'algorithme de dichotomie
- Savoir représenter graphiquement une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue
- Savoir étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue

Continuité

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la définition d'une fonction continue en un point ou sur un intervalle
- Savoir montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ possède une unique solution
- Savoir déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la solution d'une équation du type $f(x) = k$
- Savoir appliquer l'algorithme de dichotomie
- Savoir représenter graphiquement une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue
- Savoir étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue