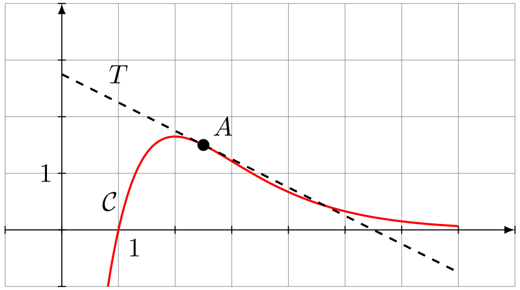
D'après Bac STI2D – Antilles-Guyane 2016

Sur le graphique ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Étude graphique
La droite T est tangente à $\mathcal{C}$ au point A(2,5 ; 1,5) et d'ordonnée à l'origine 2,75.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$;
2. $f'(2,5)$;
3. Une équation de la tangente T ;
4. $\lim\limits_{+\infty} f(x)$.

Partie B - Modélisation
On admet qu'il existe deux réels a et b tels que : pour tout réel x, $f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x+2,5}$.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Exprimer en fonction des réels a et b les nombres suivants :
$$f(1) \quad ; \quad f'(2,5).$$
3. Déduire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par a et b.
4. Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie C - Étude algébrique
On admet que pour tout réel x, $f(x) = (x-1)\text{e}^{-x+2,5}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \text{e}^{2,5}\left(\dfrac{x}{\text{e}^x} - \dfrac{1}{\text{e}^x}\right)$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

Limites de fonctions — Sujet de bac

D'après Bac S — Nouvelle-Calédonie février 2018

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Partie A
Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,
$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\,;\,0]$. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,
$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\text{e}^{-2x+1}.$$
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. (a) Démontrer que, pour tout $x > 1$,
$$1 < x < x^2 < x^3.$$
   (b) En déduire que, pour $x > 1$, $0 < f(x) < 4x^3\text{e}^{-2x+1}$.
   (c) Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3\text{e}^{-2x+1} = 4 \times \dfrac{\text{e}}{\text{e}^x} \times \dfrac{x^3}{\text{e}^x}$ puis montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3\text{e}^{-2x+1} = 0.$$
   (d) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
   En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\text{e}^{-2x+1}$.
4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.