Limites de fonctions — Exercices

Terminale

Exercice 1
Démontrer à partir de la définition que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$.

Exercice 2
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{5x-2}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = 5 - 2 \times \dfrac{1}{x}$.
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?

Exercice 3
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+1}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x \neq -1$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.
2. En déduire que la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
3. Étudier la position relative de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

Exercice 4
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de variations de f ci-dessous :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-2

1. Lire dans le tableau les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Déduire de la question précédente la présence d'asymptote à la courbe de f.
3. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x) < 3,5$ pour tout réel $x < x_0$?

Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

Exercice 5
Montrer à partir de la définition que $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x + 3 = -\infty$.

Exercice 6
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de variations de f ci-dessous :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

1. Lire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. La courbe de f admet-elle des asymptotes horizontales ?

Exercice 7
On dit qu'une droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe d'une fonction au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Limite infinie en un point a

Exercice 8
Soit g la fonction définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ définie par $g(x) = \dfrac{2}{3-x}$.

1. Déterminer la limite en 3 à droite de g. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de g ?
2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} g(x)$.

Exercice 9
On cherche à déterminer la limite d'une fonction f définie sur $[0;7[\cup]7;+\infty[$ lorsque x tend vers 7 en restant strictement supérieur à 7. On donne alors le programme suivant réalisé en Python :

```
from math import sqrt

def f(x):
    return (3 + sqrt(x))/(x-7)

def g(A):
    x = 10
    while f(x) < A:
        x = (x+7)/2
    return x-7
```

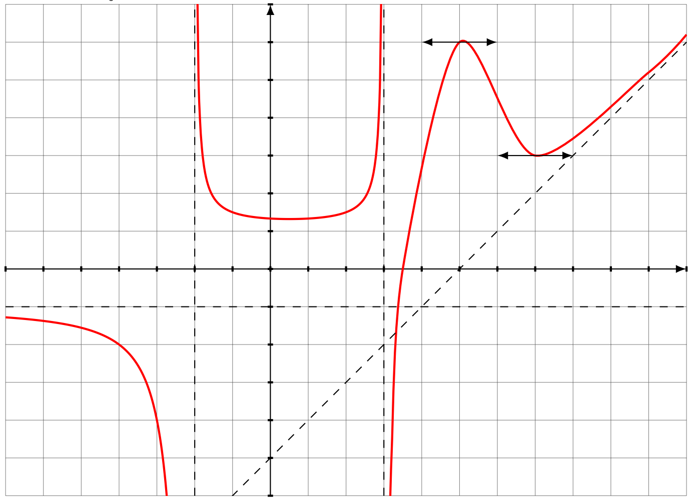
1. À l'aide du programme, déterminer l'expression de la fonction f.
2. Exécuter `g(100)`, `g(500)` et `g(1000)`.
3. Pourquoi l'instruction `x = (x+7)/2` permet d'avoir des nombres de plus en plus proches de 7 ?
4. Que semble mettre en évidence ce programme pour la limite de la fonction en 7 ?
5. Démontrer cette conjecture.

Exercice 10
Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

1. Donner les limites de f en $-\infty$, en -1 (à gauche et à droite) et en $+\infty$.
2. Donner une équation de chacune des asymptotes à la courbe de f.
3. Tracer une allure possible de la courbe représentative de f.

Exercice 11
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;3\}$. On a tracé sur le graphique les asymptotes à la courbe de f en pointillés.



1. Donner les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x)$
   (c) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x)$
   (d) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x)$
   (e) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x)$
   (f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Donner une équation de chacune des asymptotes à la courbe de f.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Opérations et limites

Exercice 12
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+2x$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{-4}{3\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2+\dfrac{3}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}+3x+2$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{-3x+1}{2-x}$

Exercice 13
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3+3x^2+x-2$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{x^2+5x-9}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

Exercice 14
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-2} \left(4x^2-2x+2\right)^3$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}+3}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)^5$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$

Limites et comparaisons

Exercice 15
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+\sin(x)$

Exercice 16
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel $x>0$, $0\leqslant g(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 17

1. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{1}{2-\cos(x)}\leqslant1$.
2. En déduire un encadrement de $\dfrac{x+2}{2-\cos(x)}$ si $x<-2$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{2-\cos(x)}$.

Limites de la fonction exponentielle

Exercice 18
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\mathrm{e}^{x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-7x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x\mathrm{e}^{0,6x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x}\left(3x^2+1\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\mathrm{e}^{-x}-3x}{1+2\mathrm{e}^{-x}}$

Exercice 19
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}-x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^2+5x)\mathrm{e}^{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(3x^2+1\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^5+4}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+6)\mathrm{e}^{x-3}$

Problèmes

Exercice 20
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3+x\mathrm{e}^{1-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=3+\dfrac{x\times\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{x}}$
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{1-x}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21
On injecte par voie intraveineuse une dose de médicament dans le sang à l'instant $t=0$. On note $Q(t)$ la quantité de médicament, dans une unité adaptée, présente dans le sang à l'instant t, en heure. On admet que :

$$Q(t)=1,8\mathrm{e}^{-1,2t}$$

1. Étudier le sens de variations de la fonction Q sur $[0;+\infty[$.
2. (a) Déterminer la limite de Q en $+\infty$.
   (b) Interpréter le résultat obtenu.
3. On donne la fonction `seuil` écrite en langage Python ci-dessous où l'argument `R` est un nombre strictement positif.
   (a) Pourquoi est-on sûr que cet algorithme se termine toujours, quelque soit la valeur de `R` >0 ?
   (b) Quelle valeur de `t` le programme renvoie-t-il si on exécute ce programme pour `R=0.9` ? Interpréter ce résultat.

```
def seuil(R):
    t = 0
    while Q(t) >= R:
        t = t + 0.01
    return t
```