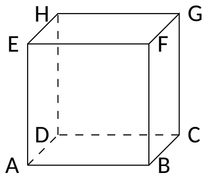
Vecteurs de l'espace

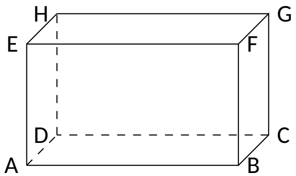
Exercice 1
$ABCDEFGH$ est un cube comme représenté ci-dessous :



Reproduire la figure et construire les points P, Q, R et S tels que :

1. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CG}$
2. $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{HD}$
3. $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
4. $\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{DB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

Exercice 2
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle comme ci-dessous :



Recopier et compléter les égalités suivantes en n'utilisant que des points de la figure :

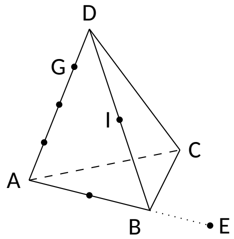
$\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{A...}$
$\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{...C}$
$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{C...}$

Exercice 3
$ABCDEFGH$ est un cube. Démontrer chacune des égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$
4. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EF}$

Exercice 4
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle. Montrer que $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Exercice 5
$ABCD$ est un tétraèdre de l'espace, I est le milieu de l'arête $[BD]$, G est le point tel que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

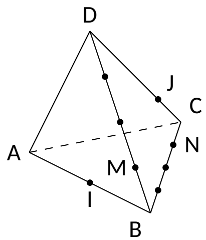


1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire que les points I, G et E sont alignés.

Combinaisons linéaires

Exercice 6
Soit $SABCD$ une pyramide de base le parallélogramme $ABCD$. Soit K le milieu de l'arête $[SC]$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{SC}$.

Exercice 7
Soit $ABCD$ un tétraèdre. On appelle I le milieu de $[AB]$. Les points J, M et N de la figure ci-dessous sont tels que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NJ}$.



1. À l'aide des graduations régulières de la figure, exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire une expression de $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Droites de l'espace

Exercice 8
$ABCD$ est un tétraèdre de l'espace. J est le milieu de $[BC]$, H et F sont les points tels que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AC}$.

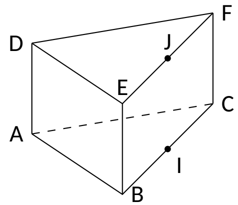
1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que le point H appartient à la droite (FJ).

Exercice 9
Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit I le milieu de $[CD]$ et J celui de $[AI]$.
Soit M et H les points tels que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

Plans de l'espace

Exercice 10
$ABCDEFGH$ est le prisme droit comme représenté ci-dessous. I et J sont les milieux des arêtes $[BC]$ et $[EF]$. M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{JC}$.

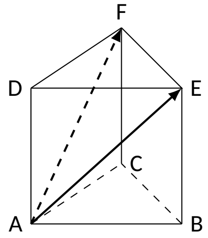


Démontrer que le point M appartient au plan $(A; \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI})$.

Exercice 11
On considère un tétraèdre $ABCD$. Soit M le point tel que $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MC}$. Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

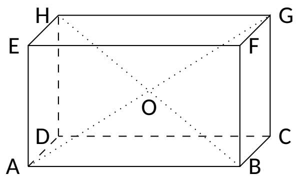
Vecteurs coplanaires

Exercice 12
$ABCDEF$ est le prisme ci-dessous.



1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont coplanaires.

Exercice 13
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de centre le point O.



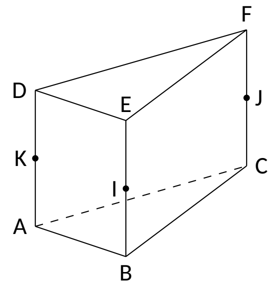
1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

Exercice 14
$ABCDEFGH$ est un pavé droit de centre O. I et J sont les centres respectifs des faces $AEHD$ et $BFGC$. K est le milieu de $[EF]$ et M est celui de $[EK]$. L est le symétrique de O par rapport à K.

1. Montrer que les points I, M et L sont alignés.
2. (a) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{CL} = a\overrightarrow{JF} + b\overrightarrow{CI}$.
   (b) Que peut-on en conclure sur les vecteurs $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{JF}$?
3. (a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont coplanaires.
   (b) Conclure sur la position des points C, I, L et J.

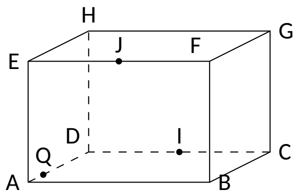
Positions relatives

Exercice 15
Le polyèdre $ABCDEF$ ci-contre est un prisme droit à base triangulaire. I est le milieu de $[EB]$, J est le milieu de $[CF]$ et K est le milieu de $[AD]$.



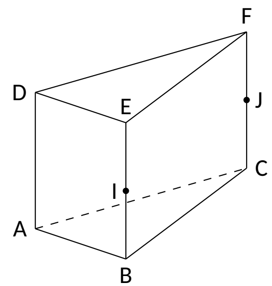
Conjecturer les positions relatives des plans :
1. (DEF) et (ABC) 2. (DIJ) et (ABC) 3. (KIJ) et (ADF) 4. (IJD) et (FEK)

Exercice 16
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ suivant.
Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[CD]$ et $[FE]$.
Le point Q appartient au segment $[AD]$ et est tel que $AQ = \dfrac{1}{4}AD$.



Dans chaque cas, conjecturer la position relative de la droite et du plan :
1. (JG) et (ABC) 2. (AB) et (QDH) 3. (FH) et (BQI)
4. (QI) et (GCD) 5. (IJ) et (EHD) 6. (IJ) et (GHD)

Exercice 17
Le polyèdre $ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire. I est le milieu du segment $[EB]$, J celui du segment $[CF]$.



Conjecturer les positions relatives des droites suivantes :
1. (AJ) et (DF) 2. (IJ) et (EF) 3. (AC) et (IJ)
4. (EJ) et (IC) 5. (JF) et (AD) 6. (JB) et (AF)

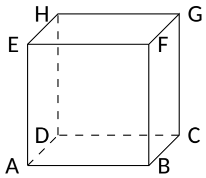
Exercice 18
$ABCD$ est un tetraèdre de sommet A. I, J et K sont définis par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
Montrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

Exercice 19
$ABCD$ est un tétraèdre. Le point I est défini par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point J est le milieu de $[AC]$.

1. Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes.
2. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.

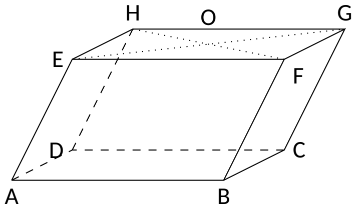
Bases et repères de l'espace

Exercice 20
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



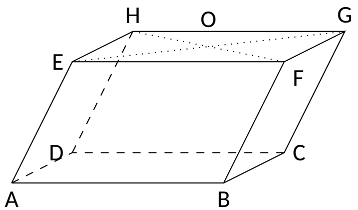
1. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ puis en déduire leurs coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:
   (a) $\overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BH}$

Exercice 21
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède et O est le centre du parallélogramme $EFGH$.



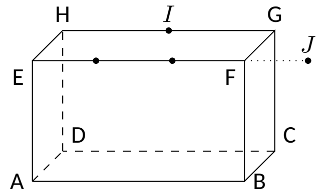
1. Donner deux vecteurs qui forment une base du plan (ABC).
2. (a) Justifier que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OH})$ est une base du plan (ABC).
   (b) Compléter la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OH})$ pour former une base de l'espace.
3. $(\overrightarrow{GO}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CE})$ est-elle une base de l'espace ? Justifier.

Exercice 22
On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$. O est le centre du parallélogramme $EFGH$.



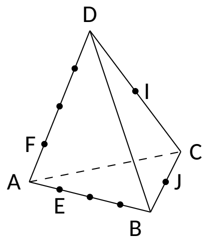
1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{OH}$ dans la base $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$.
2. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AO}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Exercice 23
On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. On note I le milieu du côté $[GH]$ et J le point tel que $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{EF}$.



1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Donner, sans justifier, les coordonnées des points A, B, D et E dans ce repère.
3. Déterminer les coordonées des points G, H, I et J. Justifier.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{HB}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Exercice 24
Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[BC]$. L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Soit E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrer que (EF) est parallèle à (IJ).

Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 25
On considère la droite d de représentation paramétrique

$$d : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

1. Le point $A(3; 5; -2)$ appartient-il à la droite d ?
2. Donner les coordonnées d'un point de d, ainsi que celles d'un vecteur directeur $\vec{u}$.
3. d est-elle parallèle à la droite d' de représentation paramétrique
$$d' : \begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = 1 - 6k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = -5 - 2k \end{cases} ?$$

Exercice 26
1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d passant par le point $A(0; 2; -1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d' passant par $B(1; 0; -1)$ et parallèle à la droite d.

Exercice 27
1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB) avec $A(2; 1; 3)$ et $B(-1; 4; 5)$.
2. Les points $C(-10; 13; 11)$ et $D(2; 0; -1)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Exercice 28
Pour chaque question, montrer que les droites d et d' sont sécantes et donner leur point d'intersection.

1. $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ et $d' : \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = -t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - t' \end{cases}$
2. $d : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$ et $d' : \begin{cases} x = 8 + t \\ y = -9 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 11 - t \end{cases}$

Exercice 29
On considère les droites d et d' dont des représentations paramétriques sont :
$$d : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 3t \end{cases} \text{ et } d' : \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 6k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - 9k \end{cases}$$
Montrer que les droites d et d' sont strictement parallèles.